Algebra esterna, spazio di Minkowski, ed operatore di Hodge

Roberto Notari

roberto.notari @ polimi.it

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Motivazione

Una sorgente puntiforme S in un ambiente omogeneo emette all' istante $t_0 = 0$ un segnale. È chiaro che il fronte d' onda ad ogni istante è la superficie di una sfera. Assumendo che il mezzo omogeneo sia descritto da uno spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ con coordinate x, y, z, avente S come origine, e che il segnale si propaghi con velocità $v = 1$, l' equazione del fronte d' onda è

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2.$$

Abbiamo quindi una famiglia di superfici sferiche concentriche il cui raggio è t. Lo spazio ed il tempo sono quindi separati con trasformazioni di coordinate ortogonali su $\mathbb{E}^3$ ed affini su $\mathbb{R}$, che rappresenta il tempo.

Negli studi su tali problemi, l' approccio usato correntemente consiste nel considerare uno spazio–tempo di dimensione 4 con trasformazioni di coordinate che coinvolgono che coinvolgono contemporaneamente le coordinate spaziali e temporali. In prima approssimazione, abbiamo quindi $\mathbb{R}^4$ con coordinate x, y, z, t. Il fronte d' onda calcolato in precedenza ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0.$$

I punti le cui coordinate verificano la precedente equazione formano un cono, detto *cono di propagazione*.

Problema: Dobbiamo scegliere quale sia il modo più utile per calcolare la distanza tra due punti di tale spazio.

Ricordiamo che, data (A, B) coppia ordinata di punti, essi individuano il vettore $\vec{AB}$. La distanza tra i due punti A e B è definita come

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\|.$$

Spostiamo allora l' attenzione sui vettori. Osserviamo che, nel caso considerato, dobbiamo considerare uno spazio vettoriale reale di dimensione 4. Se invece consideriamo la sorgente in un piano euclideo, lo spazio–tempo, e quindi lo spazio vettoriale reale, è di dimensione 3.

Richiami sugli spazi vettoriali

In questi richiami, ricordiamo due costruzioni di spazi vettoriali che useremo nel seguito.
$1.$ Spazio vettoriale quoziente.

Sia V uno spazio vettoriale, e sia $U \subseteq V$ un sottospazio. Definiamo la relazione $\sim_U$ sui vettori di V nel modo seguente:

$$\vec{v} \sim_U \vec{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} - \vec{w} \in U.$$

Proposizione 1 *$\sim_U$ è una relazione d' equivalenza.*

Teorema 2 *L' insieme quoziente $V/U = \{[\vec{v}]_U \mid \vec{v} \in V\}$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni ereditate da V, ossia*

$$[\vec{v}]_U + [\vec{w}]_U = [\vec{v} + \vec{w}]_U \quad x[\vec{v}]_U = [x\vec{v}]_U.$$

$2.$ Spazio vettoriale libero.

Sia A un insieme non vuoto. L' insieme $\langle A\rangle_{\mathbb{R}}$ formato da

$$x_1a_1 + \cdots + x_ra_r \qquad r \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R}, a_i \in A$$

con le operazioni naturali di somma e prodotto per numeri reali è uno spazio vettoriale reale, detto spazio vettoriale libero generato da A su $\mathbb{R}$.

Gli elementi di $\langle A\rangle_{\mathbb{R}}$ possono essere immaginati come funzioni da A in $\mathbb{R}$ nulle eccetto che per un numero finito di elementi.
Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$, si prova facilmente che $\langle A\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$.

Prodotto tensoriale

Siano V e V' due spazi vettoriali reali, sia $V \times V'$ il loro prodotto cartesiano, e sia $\langle V \times V' \rangle_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale libero generato dalle coppie di vettori di V e di V'. Sia $U \subseteq \langle V \times V' \rangle_{\mathbb{R}}$ il sottospazio generato da

$$(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v'}) - (\vec{v}, \vec{v'}) - (\vec{w}, \vec{v'}), (x\vec{v}, \vec{v'}) - x(\vec{v}, \vec{v'})$$

e da

$$(\vec{v}, \vec{v'} + \vec{w'}) - (\vec{v}, \vec{v'}) - (\vec{v}, \vec{w'}), (\vec{v}, x\vec{v'}) - x(\vec{v}, \vec{v'})$$

per ogni scelta di $\vec{v}, \vec{w} \in V, \vec{v'}, \vec{w'} \in V', x \in \mathbb{R}$.

Definizione 3 *Si chiama prodotto tensoriale di V e V', e si indica con $V \otimes V'$ lo spazio vettoriale quoziente $\langle V \times V' \rangle_{\mathbb{R}} / U$.*

Anche se tecnica, la definizione precedente risulta di facile utilizzo, come il seguente risultato prova.

Teorema 4 *Sia* $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ *una base di* V *e sia* $C = (\vec{v'}_1, \dots, \vec{v'}_s)$ *una base di* V'*. Allora* $\vec{v}_i \otimes \vec{v'}_j$, *con* $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$ *è una base di* $V \otimes V'$*. In particolare,* $\dim(V \otimes V') = \dim(V) \dim(V')$.

Siano $V_1, \dots, V_k$ spazi vettoriali reali. Allora si definisce

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k = (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{k-1}) \otimes V_k.$$

Si dimostra facilmente, ma con calcoli lunghi, che spostando le parentesi, si ottengono spazi vettoriali isomorfi, e quindi le parentesi possono essere trascurate.

Nel seguito, consideriamo solo il caso in cui $V = V'$, ottenendo quindi $V \otimes V$, i cui elementi vengono chiamati tensori su V di rango 2, ovvero il caso $V_1 = \cdots = V_k = V$ in cui si ottiene $V \otimes \cdots \otimes V = V^{\otimes k}$ i cui elementi sono chiamati tensori di rango k su V.
Dalla formula per la dimensione, si ricava che

$$\dim(V^{\otimes k}) = (\dim(V))^k.$$

Se $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ è una base di V, allora i tensori di rango k su V sono espressioni della forma

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_k} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_k}.$$

Algebra esterna

Definiamo ora il quoziente di $V^{\otimes k}$ cui siamo interessati. Sia $U \subseteq V^{\otimes k}$ il sottospazio generato da

1. $\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_k$ se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sono linearmente dipendenti;
2. $\vec{v}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \vec{v}_{\sigma(k)} - (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_k$ con σ permutazione di $\{1, \ldots, k\}$ di parità $\varepsilon(\sigma)$, se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 5 *Si chiama k–esimo prodotto esterno lo spazio vettoriale reale*

$$\wedge^k V = V^{\otimes k} / U.$$

Gli elementi di $\wedge^k V$ si scrivono usando il simbolo $\wedge$.

Vogliamo calcolare una base per tale spazio vettoriale.
Cominciamo col considerare $\wedge^2 V$.
Una base di $V \otimes V$, supponendo $\dim(V) = 3$, è
$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3, \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3.$
I tensori

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2$$

appartengono al sottospazio U, e quindi ritroviamo che

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = 0,$$

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3.$$

Una base di $\wedge^2 V$ è $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, e $\dim(\wedge^2 V) = 3$.

Generalizzando l' esempio precedente, si ha

Teorema 6 *Una base di* $\wedge^k V$ *è* $\vec{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_k}$ *con* $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq \dim(V)$ *e quindi* $\dim(\wedge^k V) = \binom{\dim(V)}{k}$. *Se* $k > \dim(V)$ *allora* $\wedge^k V = 0$.

Ad esempio, se $\dim(V) = 2$, abbiamo che una base di $\wedge^2 V$ è $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ e tutti gli spazi $\wedge^k V$ con $k > 2$ sono nulli.

Se $\dim(V) = 3$, una base di $\wedge^2 V$ è $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, una di $\wedge^3 V$ è $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ e tutti gli spazi $\wedge^k V$ sono nulli, con $k > 3$.

Definiamo ora un prodotto tra elementi di spazi wedge.

Definizione 7 *Siano h, k numeri interi non negativi. La funzione*

$$\wedge^h V \times \wedge^k V \longrightarrow \wedge^{h+k} V$$

definita ponendo

$$(\vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_h, \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k) \mapsto \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_h \wedge \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k$$

ed estesa per linearità ha le proprietà di un prodotto (non commutativo) e quindi abbiamo la struttura di algebra su $\bigoplus_{k=1}^n \wedge^k V = \wedge V$ nota come algebra esterna su V.

Spazio duale

Continuiamo a presentare costruzioni di spazi vettoriali a partire da uno spazio vettoriale dato.

Sia quindi V uno spazio vettoriale reale.

Definizione 8 *Lo spazio vettoriale reale* $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ *delle applicazioni lineari da* V *ad* $\mathbb{R}$ *è chiamato spazio vettoriale duale di* V *ed è indicato con* V^*.

Proposizione 9 *Se* V *ha dimensione finita,* V^* *è isomorfo a* V.

Essendo V^* uno spazio vettoriale reale, possiamo costruire la sua algebra esterna ottenendo quindi $\wedge V^*$.

Presentiamo ora un operatore che permette di costruire passare da elementi di $\wedge^k V^*$ ad elementi di $\wedge^{k-1} V^*$.

Definizione 10 *Sia $\vec{u} \in V$. L' operatore di restrizione $i_{\vec{u}}$ associato a tale vettore è*

$$i_{\vec{u}} : \wedge^k V^* \to \wedge^{k-1} V^*$$

definito come

$$i_{\vec{u}}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \alpha_i(\vec{u}) \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_k$$

ed esteso poi per linearità.

Possiamo anche considerare il duale del duale di V, indicato con V^{**}, e chiamato biduale di V.

È chiaro che, se V ha dimensione finita, allora V è isomorfo a V^{**}.

In generale, dato un vettore $\vec{v} \in V$, possiamo costruire $\hat{u} \in V^{**}$ ponendo $\hat{u}(f) = f(\vec{v})$ per ogni $f \in V^{*}$. L' applicazione lineare $\varphi : V \to V^{**}$ definita come $\varphi(\vec{v}) = \hat{v}$ è iniettiva. Se φ risulta un isomorfismo, V è uno spazio vettoriale riflessivo.

Lo studio di spazi vettoriali di dimensione infinita, e dei loro duali e biduali è in genere sviluppato all' interno dell' Analisi Funzionale.

Struttura metrica su V

Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica non–degenere, ossia, fissata una base $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ di V, supponiamo che la matrice

$$B = (b(\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{i,j=1,\ldots,n}$$

sia simmetrica e di rango massimo. Usando il procedimento di Gram–Schmidt, possiamo determinare una base $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ di V ortonormale per b, ossia

$$b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j = 1, \ldots, r \\ -1 & \text{se } i = j = r+1, \ldots, n \end{cases} \quad .$$

La coppia $(r, n-r)$ è detta segnatura di b e dipende da b e né dalla base $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, né dalla base ortonormale B costruita.

Ad esempio, il caso di una forma b di segnatura $(3, 0)$ corrisponde alla scelta del prodotto scalare euclideo e della metrica euclidea su V di dimensione 3. Infatti, interpretando b come prodotto scalare su V, abbiamo

$$\langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

ed il modulo di un vettore $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ risulta uguale a

$$\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Spazio di Minkowski

Scegliamo una forma di segnatura $(n-1,1)$ su V. In questo caso, V è detto spazio di Minkowski.

b non è un prodotto scalare ($b(\vec{e}_n, \vec{e}_n) = -1 < 0$), ma è comunque un prodotto interno.

Nel caso di segnatura $(3,1)$ la forma b valutata su $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4$ e $\vec{v} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 + y_4\vec{e}_4$ diventa

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = b(\vec{u}, \vec{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4,$$

mentre il quadrato del modulo di $\vec{u}$ è uguale a

$$\|\vec{u}\|^2 = b(\vec{u}, \vec{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

L’ analogia tra il quadrato del modulo del vettore $\vec{u}$

$$\|\vec{u}\|^2 = b(\vec{u}, \vec{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

e l’ equazione del cono di propagazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

è evidente. I vettori di modulo nullo sono detti vettori *isotropi* nel contesto delle forme quadratiche, mentre sono detti *light–like* nel contesto della teoria della relatività.

Questo giustifica l’ adozione di una tale metrica su V per trattare il problema iniziale.

Possiamo considerare una forma bilineare simmetrica non degenere su $\wedge^k V$ indotta dalla forma b definita su V nel modo seguente: date $\vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_k, \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k \in \wedge^k V$ poniamo

$$\langle \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_k, \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle \vec{u}_1, \vec{v}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{u}_1, \vec{v}_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{u}_k, \vec{v}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{u}_k, \vec{v}_k \rangle \end{pmatrix}.$$

Usando questo prodotto interno, la base $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j$, $1 \leq i < j \leq 4$, di $\wedge^2 V$ è ortonormale con segnatura $(3, 3)$, la base $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \wedge \vec{e}_h, 1 \leq i < j < h \leq 4$, è ortonormale con segnatura $(1, 3)$, ed infine $\omega = \vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_4$, base di $\wedge^4 V$, verifica $\|\omega\|^2 = -1$.

La forma b permette di scrivere in modo esplicito un isomorfismo tra V e V^*.

Dato un vettore $\vec{v} \in V$, costruiamo l' applicazione lineare $\vec{v}^{\,\flat} : V \to \mathbb{R}$ definita come

$$\vec{v}^{\,\flat}(\vec{u}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

Definiamo allora $\psi : V \to V^*$ come $\psi(\vec{v}) = \vec{v}^{\,\flat}$.
ψ è un' applicazione lineare iniettiva.
Visto che $\dim(V) = \dim(V^*)$, allora ψ è un isomorfismo.
L' isomorfismo inverso viene indicato come $\sharp : V^* \to V$.
Gli isomorfismi $\flat$ e $\sharp$ possono essere estesi dando isomorfismi tra $\wedge^k V$ e $\wedge^k V^*$ per ogni k.

Chiediamo di più: vogliamo che $^\flat$ e $^\sharp$ siano isometrie tra V e V^*.

Dobbiamo allora scegliere opportunamente una forma bilineare simmetrica non–degenere su V^*.

Definiamo allora $b^\flat : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ come

$$b^\flat(\alpha, \beta) = b(\,^\sharp(\alpha),\,^\sharp(\beta)).$$

Quindi, $(\vec{e}_1{}^\flat, \ldots, \vec{e}_n{}^\flat)$ è base ortonormale di V^* con la stessa segnatura della base ortonormale di V.
Estendendo $b^\flat$ a $\wedge^k V^*$ otteniamo gli stessi risultati ottenuti per V.

Operatore di Hodge

Lo scopo di questa sezione è di definire una nozione di "ortogonalità naturale" negli spazi $\wedge^k V$. Essendo $\wedge^k V^*$ isometrico a $\wedge^k V$, i risultati in $\wedge^k V$ possono essere usati senza modifiche in $\wedge^k V^*$.

Cominciamo ricordando che $\dim(\wedge^k V) = \binom{\dim(V)}{k}$. Dalle proprietà del coefficiente binomiale, otteniamo che, posto $n = \dim(V)$, gli spazi vettoriali $\wedge^k V$ e $\wedge^{n-k} V$ hanno la stessa dimensione, e sono quindi isomorfi.
L' operatore di Hodge è un isomorfismo tra $\wedge^k V$ e $\wedge^{n-k} V$.
Per cominciare scegliamo una base di $\wedge^n V$ che ha dimensione 1, e quindi una sua base è $\omega = \vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$ con $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ base ortonormale di V. Si dice che ω è un orientamento di V.

L’ operatore di Hodge è

$$* : \wedge^k V \to \wedge^{n-k} V$$

ed è definito nel modo seguente.

Sia $y \in \wedge^k V$.

$*y$, immagine di y tramite $*$ è l’ unico vettore di $\wedge^{n-k} V$ che verifica la relazione

$$x \wedge *y = \langle x, y \rangle \omega$$

per ogni $x \in \wedge^k V$.

Ad esempio, sia $\dim(V) = 3$ e sia b il prodotto scalare euclideo, con base ortonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Scelto $\omega = \vec{i} \wedge \vec{j} \wedge \vec{k}$, calcoliamo esplicitamente $* : \wedge^2 V \to V$. Dobbiamo quindi calcolare $*(\vec{i} \wedge \vec{j}), *(\vec{i} \wedge \vec{k})$ e $*(\vec{j} \wedge \vec{k})$. Per il primo dei tre, abbiamo le uguaglianze

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge *(\vec{i} \wedge \vec{j}) = \langle \vec{i} \wedge \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j} \rangle \, \omega = \omega$$

$$(\vec{i} \wedge \vec{k}) \wedge *(\vec{i} \wedge \vec{j}) = \langle \vec{i} \wedge \vec{k}, \vec{i} \wedge \vec{j} \rangle \, \omega = 0$$

$$(\vec{j} \wedge \vec{k}) \wedge *(\vec{i} \wedge \vec{j}) = \langle \vec{j} \wedge \vec{k}, \vec{i} \wedge \vec{j} \rangle \, \omega = 0.$$

Quindi, $*(\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{k}$. Analogamente, si verifica che $*(\vec{i} \wedge \vec{k}) = -\vec{j}$ e che $*(\vec{j} \wedge \vec{k}) = \vec{i}$.

Quindi, l' operatore di Hodge fornisce l' identificazione solita degli elementi di $\wedge^2 V$ con vettori di V tramite il prodotto vettoriale.

Attenzione all' esempio precedente: se scegliamo $\omega = \vec{i} \wedge \vec{k} \wedge \vec{j}$ come base positiva di $\wedge^3 V$, allora

$$*(\vec{i} \wedge \vec{j}) = -\vec{k}, \quad *(\vec{i} \wedge \vec{k}) = \vec{j}, \quad *(\vec{j} \wedge \vec{k}) = -\vec{i}.$$

Quindi, esistono almeno due prodotti vettoriali distinti in V, fissata b, che dipendono dall' orientamento scelto.

Si può dimostrare che ne esistono esattamente due, ossia i due presentati.

Veniamo ora all' operatore di Hodge nel caso di uno spazio di Minkowski di tipo $(2, 1)$.

Abbiamo 4 casi, per $k = 0, 1, 2, 3$, con $* : \wedge^k V \to \wedge^{3-k} V$.

Usando la formula generale, possiamo calcolare le immagini dei vettori delle varie basi, supponendo che $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sia una base ortonormale per b.

$$*(1) = \omega \qquad *(\omega) = -1 \qquad \textbf{(}k = 0, 3\textbf{)}$$

$$*(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3, *(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3, *(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \qquad \textbf{(}k = 1\textbf{)}$$

$$*(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \vec{e}_3, *(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3) = \vec{e}_2, *(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = -\vec{e}_1. \qquad \textbf{(}k = 2\textbf{)}$$

Tra le varie proprietà dell' operatore di Hodge, ricordiamo le due seguenti.

Teorema 11 *Siano* $x, y \in \wedge^k V$. *Allora*

$$\langle *(x), *(y) \rangle = -\langle x, y \rangle.$$

Teorema 12 *Siano* $* : \wedge^k V \to \wedge^{n-k} V$ *e* $* : \wedge^{n-k} V \to \wedge^k V$ *operatori di Hodge. Allora*

$$* \circ * : \wedge^k V \to \wedge^k V \qquad e \qquad * \circ * : \wedge^{n-k} V \to \wedge^{n-k} V$$

sono l' opposto dell' identità.

Entrambi i teoremi possono essere dimostrati verificando le uguaglianze sui vettori delle basi degli spazi considerati.

Visto che $\wedge^k V$ e $\wedge^k V^*$ sono isometrici, e che l' operatore di Hodge dipende dalla metrica e dall' orientamento, scegliendo lo stesso orientamento su $\wedge^n V$ e su $\wedge^n V^*$ l' operatore di Hodge commuta con gli isomorfismi ${}^\flat$ e ${}^\sharp$. Possiamo allora evitare di riscrivere le immagini dei vettori delle basi di $\wedge^k V^*$ essendo già note.

Spazi di segnatura $(2,1)$

Nel seguito assumiamo che V sia uno spazio di Minkowski di segnatua $(2,1)$.
Enunciamo ora dei risultati che possono tornare utili quando si usano le nozioni esposte finora.

Proposizione 13 *Siano* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ *vettori linearmente indipendenti, e sia* $\Omega=\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}(\neq 0)$. *Allora*

$$*(\vec{u}) = -\frac{1}{*(\Omega)}\left(\langle\vec{u},\vec{w}\rangle\vec{u}\wedge\vec{v}+\|\vec{u}\|^2\vec{v}\wedge\vec{w}+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{w}\wedge\vec{u}\right)$$

e

$$*(\vec{u}\wedge\vec{v}) = -\frac{1}{*(\Omega)}\left(\langle\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{w}\rangle\vec{u}+\langle\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{w}\wedge\vec{u}\rangle\vec{v}+\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2\vec{w}\right).$$

Proposizione 14 *Siano* $\vec{u}, \vec{v} \in V$ *e sia* $\alpha \in V^*$. *Allora*

$$\alpha(*(\vec{u} \wedge \vec{v})) = *(\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \alpha^\sharp).$$

Proposizione 15 *Siano* $\alpha, \beta \in V^*$ *linearmente indipendenti. Allora*

$$i_{\vec{u}}(\alpha \wedge \beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \in L\left((*(\alpha \wedge \beta))^\sharp\right).$$

Proposizione 16 *Sia* $\Theta \in \wedge^3 V^*$ *non nulla, e siano* $\alpha, \beta \in V^*$. *Allora*

$$i_{\vec{u}}(\Theta) = \alpha \wedge \beta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \frac{1}{*(\Theta)} \left(*(\alpha \wedge \beta)\right)^\sharp.$$

Applicazione

Supponiamo di avere due ricevitori M_0 ed M_1 in un piano euclideo, e supponiamo che una sorgente S nello stesso piano emetta un segnale, che viaggia con velocità unitaria. La TDOA relativa ai due ricevitori è

$$d(M_1, S) - d(M_0, S) = \tau_1$$

e rappresenta un ramo d' iperbole con fuochi nei punti M_0 ed M_1 passante per S. Localizzare una sorgente S tramite le TDOA è allora equivalente ad intersecare dei rami di iperbole.

È stato dimostrato che l’ intersezione di rami d’ iperbole è un problema mal condizionato, ossia piccoli cambiamenti nei dati possono produrre posizioni stimate della sorgente molto lontane tra loro. Un problema è allora elaborare dei metodi stabili e robusti per risolvere tale problema.

Un problema collegato è lo studio delle regioni di localizzazione al variare del numero e della posizione dei ricevitori, ossia stabilire, in funzione del numero e della posizione dei ricevitori, se esistono posizioni diverse della sorgente che producono lo stesso insieme di TDOA, rendendo quindi impossibile l’ individuazione univoca della sorgente.

Passando allo spazio–tempo, ed usando il prodotto interno di Minkowski, scegliamo $M_0(0,0,0), M_1(x_1, y_1, \tau_1)$ ed $S(x, y, \tau)$. I vettori $S - M_0$ e $S - M_1$, usando il prodotto interno di Minkowski, hanno quadrato del modulo uguale a

$$\|S - M_0\|^2 = x^2 + y^2 - \tau^2,$$

$$\|S - M_1\|^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (\tau - \tau_1)^2.$$

D' altra parte, ponendo $d(S, M_0) = -\tau, \tau < 0$, la TDOA precedente diventa $d(S, M_1) = \tau_1 - \tau$, e quindi dobbiamo intersecare le due falde dei coni di propagazione $\|S - M_0\|^2 = \|S - M_1\|^2 = 0$ individuate dal tempo $\tau < 0$, visto che il segnale viene emesso prima di raggiungere M_0.

$$\|S - M_1\|^2 = \|S - M_0\|^2 - 2\langle S - M_0, M_1 - M_0\rangle + \|M_1 - M_0\|^2$$

e quindi, essendo $\|S - M_0\|^2 = 0$, si ottiene $\langle S - M_0, M_1 - M_0\rangle = \frac{1}{2}\|M_1 - M_0\|^2$ che rappresenta l' equazione di un piano.
In conclusione, invece di intersecare due falde di due coni, possiamo intersecare una falda di un cono con un piano. La proiezione dell' intersezione sul piano euclideo è il ramo d' iperbole su cui si trova S. All' aumentare del numero di ricevitori, invece di intersecare rami di iperbole, possiamo allora intersecare i vari piani (facile usando l' algebra esterna), e poi intersecare quanto ottenuto con la falda del cono di vertice M_0, unico cono rimasto, e chiamato cono di riferimento.