LA RAPPRESENTAZIONE INDOTTA E IL TEOREMA DI IMPRIMITIVITÀ

1. Introduzione

Queste note sono una breve sintesi di alcune nozioni di base nello studio delle rappresentazioni indotte e della loro applicazione ai prodotti semidiretti. Nell'esposizione si sono seguite essenzialmente delle note del prof. G. Cassinelli (nelle sezioni 3 e 4.1), la dimostrazione del teorema di imprimitività ideata da Poulsen [1] e pubblicata da Ørsted [2], mentre la sezione 5 ricalca le sezioni 6.6 e 6.7 in [4].

Le dimostrazioni sono, in linea generale, complete, anche se le verifiche più facili sono lasciate al lettore. Gli unici risultati 'difficili' dei quali non si è riportata la dimostrazione sono i Teoremi 1 e 7. Il Teorema 1, in partcolare, richiede in modo essenziale che il gruppo localmente compatto G sia a base numerabile, ed è alla base di tutta la discussione successiva. Tuttavia la rappresentazione indotta e il teorema di imprimitività si estendono anche rimuovendo tale ipotesi semplificativa (vedi [4]).

2. Notazioni e proprietà generali

Nel seguito, G è un gruppo topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile, $H \subset G$ è un sottogruppo chiuso. Denoteremo con μ_G [con μ_H] una fissata misura di Haar di G [di H] invariante a sinistra, e con Δ_G [con Δ_H] la funzione modulare di G [di H].

$X = G/H$ è l'insieme dei laterali sinistri di H in G. $p : G \to X$ è la proiezione canonica di G su X. X sarà dotato della topologia quoziente (la topologia più fine rispetto alla quale p è un'applicazione continua). X porta un'azione (ovvia) transitiva di G a sinistra. L'azione di $g \in G$ su $x \in X$ sarà denotata $g.x$.

È facile verificare che:

- X è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile;
- l'azione $G \times X \ni (g, x) \mapsto g.x$ è continua;
- p è un'applicazione continua e aperta;
- se $K \subset X$ è compatto, $\exists K_0 \subset G$ compatto e t. c. $p(K_0) = K$ (infatti, se V è un intorno aperto a chiusura compatta di 1 in G, allora $\exists \{x_1 \dots x_n\} \subset G$ t. c. $\{p(x_j V)\}_{j=1}^n$ è un ricoprimento di $K \Rightarrow$ si può scegliere $K_0 = p^{-1}(K) \cap \bigcup_{j=1}^n x_j \overline{V}$).

Teorema 1 (Federer, Morse)**.** *Esiste un'applicazione $s : X \to G$ t. c.*

(1) $p \circ s = \mathrm{id}_X$*;*
(2) s *è misurabile;*
(3) $\overline{s(K)}$ *è compatto per ogni $K \subset X$ compatto.*

Date: 18/11/2009.

Dimostrazione. Vedi il Lemma 5.1 in [3]. □

Un'applicazione s come nel teorema precedente si dice *sezione di Borel regolare*.

3. Misure invarianti e quasi invarianti su X

3.1. **Definizione.** Per *misura* su uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile Ω intenderemo sempre (salvo esplicito avviso contrario) una misura positiva e regolare sulla σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(\Omega)$.

Se α è una misura su X e $g \in G$, denoteremo con $g.\alpha$ la misura su X data da

$$\int_X \varphi(x)\, \mathrm{d}g.\alpha(x) = \int_X \varphi(g.x)\, \mathrm{d}\alpha(x) \quad \forall \varphi \in C_c(X).$$

Definizione 1. La misura α su X si dice

- *quasi invariante* se $g.\alpha \simeq \alpha$ (equivalenza nel senso delle misure) per ogni $g \in G$;
- *invariante* se $g.\alpha = \alpha$ per ogni $g \in G$.

3.2. **La mappa di Weil.** La *mappa di Weil* è l'applicazione

$$M : C_c(G) \to C_c(X), \qquad Mf(p(g)) = \int_H f(gh)\, \mathrm{d}\mu_H(h).$$

È facile verificare che

- M è lineare e positiva;
- $\operatorname{supp} Mf \subset p(\operatorname{supp} f)$;
- se $\varphi \in C_c(X)$, allora $M(f\varphi \circ p) = \varphi Mf$.

Proposizione 1. *Se $\varphi \in C_c(X)_+$ (= le funzioni positive in $C_c(X)$), allora $\exists f \in C_c(G)_+$ t. c. $Mf = \varphi$.*

Dimostrazione. In due parti.

(1) Se $K \subset X$ è compatto, $\exists h \in C_c(G)_+$ t. c. $Mh|_K = 1$. Infatti, basta scegliere $\eta \in C_c(X)_+$ con $\eta|_K = 1$, $K_0 \subset G$ compatto t. c. $p(K_0) = \operatorname{supp} \eta$, $g \in C_c(G)_+$ con $g|_{K_0} > 0$, e porre

$$h = \frac{\eta \circ p}{Mg \circ p}\, g.$$

(2) Con $K = \operatorname{supp} \varphi$ nel punto precedente, basta porre

$$f = h\varphi \circ p.$$

□

Corollario 1. $M(C_c(G)) = C_c(X)$.

3.3. **L'applicazione $\alpha \mapsto \rho_\alpha \mu_G$.** A ogni misura α su X è associata un'unica misura α_0 su G data da
$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}\alpha_0(g) = \int_X Mf(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) \quad \forall f \in C_c(G).$$
L'applicazione $\alpha \mapsto \alpha_0$ ha le seguenti proprietà:

- è iniettiva (segue da $M(C_c(G)) = C_c(X)$);
- $(g.\alpha)_0 = g.\alpha_0$ $\forall g \in G$ (facile calcolo);
- posto
$$\omega : X \times H \to G, \qquad \omega(x,h) = s(x)h$$
si vede facilmente che
  (i) ω è un isomorfismo misurabile;
  (ii) $\overline{\omega^{-1}(K)}$ è compatto $\forall K \subset G$ compatto;
  (iii) $\alpha_0 = \omega(\alpha \otimes \mu_H)$;
- α è quasi invariante [invariante] $\Rightarrow$ α_0 è quasi invariante [invariante] (segue dai due punti precedenti).

Proposizione 2 (von Neumann)**.** *Se ν è una misura quasi invariante su G, allora $\nu \simeq \mu_G$.*

Dimostrazione. Per ogni $f \in C_c(G)_+$, $K \subset G$ compatto, si ha
$$\int_G f(a)\nu(a^{-1}.K)\,\mathrm{d}\mu_G(a) = \int_G \left[\int_G f(a)1_K(ab)\,\mathrm{d}\mu_G(a)\right] \mathrm{d}\nu(b).$$
Se $\nu(K) = 0$, il 1$^{\text{o}}$ membro è 0 perché ν è quasi invariante. Perciò

(1) $$\int_G f(a)1_K(ab)\,\mathrm{d}\mu_G(a) = 0 \quad \text{per } \nu\text{-q. o. } b \in G.$$

Poiché $b \mapsto \int_G f(a)1_K(ab)\,\mathrm{d}\mu_G(a)$ è continua, l'eq. 1 vale $\forall b \in \operatorname{supp}\nu$. Poiché ν è quasi invariante, $\operatorname{supp}\nu = G$. L'eq. 1 valutata in $b = 1$ dà quindi
$$\int_G f(a)1_K(a)\,\mathrm{d}\mu_G(a) = 0.$$
Ciò vale per ogni $f \in C_c(G)_+$, quindi $\mu_G(K) = 0$.

Viceversa, se $\mu_G(K) = 0$
$$\int_G f(a)1_K(ab)\,\mathrm{d}\mu_G(a) = \Delta_G(b)^{-1}\int_G f(a)1_K(a)\,\mathrm{d}\mu_G(a) = 0 \quad \forall b \in G.$$
Quindi
$$\int_G f(a)\nu(a^{-1}.K)\,\mathrm{d}\mu_G(a) = 0,$$
che, poiché vale per ogni $f \in C_c(G)_+$, implica $\nu(a^{-1}.K) = 0$ per μ_G-q. o. $a \in G$. Essendo ν quasi invariante, $\nu(a^{-1}.K) = 0$ per ogni a, in particolare per $a = 1$, cioè $\nu(K) = 0$. $\square$

Teorema 2. *Se α è un misura quasi invariante su X, $\exists!$ (μ_G-q. o.) $\rho_\alpha \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(G,\mu_G)$, con $\rho_\alpha > 0$, t. c.*
$$\int_X Mf(x)\, d\alpha(x) = \int_G f(g)\rho_\alpha(g)\, d\mu_G(g) \quad \forall f \in C_c(G).$$
Inoltre, per ogni $h \in H$ si ha
$$\rho_\alpha(gh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho_\alpha(g) \quad \text{per } \mu_G\text{-q. o. } g \in G.$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, $\exists!$ $\rho_\alpha \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(G,\mu_G)$, con $\rho_\alpha > 0$, t. c. $\alpha_0 = \rho_\alpha\mu_G$. Ciò prova la prima affermazione. La seconda segue dal fatto che
$$\int_G f(g)\rho_\alpha(gh)\, \mathrm{d}\mu_G(g) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\int_G f(g)\rho_\alpha(g)\, \mathrm{d}\mu_G(g) \quad \forall f \in C_c(G)$$
(facile calcolo, tenuto conto delle definizioni). □

3.4. **L'applicazione $\rho \mapsto \alpha_\rho$.** Supponiamo fissata $\rho : G \to \mathbb{R}$ misurabile e t. c.

(1) $\rho \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(G,\mu_G)$;
(2) $\rho > 0$;
(3) per ogni $h \in H$ e $g \in G$
$$\rho(gh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho(g).$$

Lemma 1. *Per ogni $f \in C_c(G)$ t. c. $Mf = 0$, si ha*
$$\int_G f(g)\rho(g)\, d\mu_G(g) = 0.$$

Dimostrazione. Se $f_1 \in C_c(G)$, allora con un facile calcolo si trova
$$0 = \int_G f_1(g)Mf(p(g))\rho(g)\, \mathrm{d}\mu_G(g) = \int_G Mf_1(p(g))f(g)\rho(g)\, \mathrm{d}\mu_G(g).$$
Scelta f_1 t. c. $Mf_1|_{p(\operatorname{supp} f)} = 1$ si ha la tesi. □

Dal lemma e dalle proprietà dell'applicazione M segue che $\exists!$ misura α_ρ su X t. c.
$$\int_G f(g)\rho(g)\, \mathrm{d}\mu_G(g) = \int_X Mf(x)\, \mathrm{d}\alpha_\rho(x) \quad \forall f \in C_c(G).$$

Proposizione 3. $\omega(\alpha_\rho \otimes \mu_H) = \rho\mu_G$.

Dimostrazione. Immediata dalla formula precedente. □

La proposizione precedente si traduce nella seguente *formula di Mackey-Bruhat*
$$\int_G f(g)\rho(g)\, \mathrm{d}\mu_G(g) = \int_{X\times H} f(s(x)h)\, \mathrm{d}(\alpha_\rho \otimes \mu_H)(x,h) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(G,\rho\mu_G).$$

Proposizione 4. *Se $E \in \mathcal{B}(X)$, allora $\alpha_\rho(E) = 0 \Leftrightarrow \mu_G(p^{-1}(E)) = 0$.*

Dimostrazione. Segue dalla formula precedente e dal teorema di Fubini. □

Proposizione 5. *α_ρ è quasi invariante.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che

$$g.\alpha_\rho = \alpha_{\rho'} \quad \forall g \in G,$$

dove $\rho'(g') = \rho(g^{-1}g')$ (facile calcolo) e dalla proposizione precedente (α_ρ e $\alpha_{\rho'}$ hanno gli stessi insiemi di misura nulla). □

In conclusione, abbiamo il fatto seguente.

Teorema 3. *L'applicazione $\alpha \mapsto \rho_\alpha$ data da*

$$\int_G f(g)\rho_\alpha(g)\, d\mu_G(g) = \int_X Mf(x)\, d\alpha(x) \quad \forall f \in C_c(G)$$

è biunivoca dall'insieme delle misure quasi invarianti su X all'insieme delle μ_G-classi di equivalenza di funzioni misurabili $\rho : G \to \mathbb{R}$ che soddisfano

(1) $\rho \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(G, \mu_G)$;
(2) $\rho > 0$;
(3) *per ogni $h \in H$ e $g \in G$*

$$\rho(gh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho(g).$$

Dimostrazione. Resta da mostrare che se α è una misura quasi invariante su X e ρ_α è come nel Teorema 2, si può sceglere $\tilde{\rho} : G \to \mathbb{R}_+$ misurabile, μ_G-equivalente a ρ_α, e t. c. $\tilde{\rho}(gh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\tilde{\rho}(g)$ per ogni $h \in H$ e $g \in G$. Posto

$$\tilde{\rho}(g) = \rho_\alpha(s(p(g)))\frac{\Delta_H(s(p(g))^{-1}g)}{\Delta_G(s(p(g))^{-1}g)} \quad \forall g \in G,$$

$\tilde{\rho}$ soddisfa le condizioni nell'enunciato. Se $h \in H$, si ha facilmente

$$\frac{\rho_\alpha(gh)}{\tilde{\rho}(gh)} = \frac{\rho_\alpha(g)}{\tilde{\rho}(g)} \quad \text{per } \mu_G\text{-q. o. } g \in G,$$

quindi

$$\frac{\rho_\alpha(s(x)h)}{\tilde{\rho}(s(x)h)} = \frac{\rho_\alpha(s(x))}{\tilde{\rho}(s(x))} = 1 \quad \text{per } \alpha_{\tilde{\rho}}\text{-q. o. } x \in X$$

per la Proposizione 4. Perciò, applicando ripetutamente la formula di Mackey-Bruhat,

$$\begin{aligned}
\int_G f(g)\rho_\alpha(g)\,\mathrm{d}\mu_G(g) &= \int_{X\times H} f(s(x)h)\frac{\rho_\alpha(s(x)h)}{\tilde{\rho}(s(x)h)}\,\mathrm{d}(\alpha_{\tilde{\rho}} \otimes \mu_H)(x,h) \\
&= \int_{X\times H} f(s(x)h)\,\mathrm{d}(\alpha_{\tilde{\rho}} \otimes \mu_H)(x,h) \\
&= \int_G f(g)\tilde{\rho}(g)\,\mathrm{d}\mu_G(g) \quad \forall f \in C_c(G),
\end{aligned}$$

cioè $\tilde{\rho} = \rho_\alpha$ μ_G-quasi ovunque. $\square$

3.5. **La classe delle misure quasi invarianti su X.**

3.5.1. *Esistenza.* Si scelga $f \in C(G)_+ \cap \mathcal{L}^1(G, \mu_G)$ t. c. $f(g) > 0$ $\forall g$. Allora $\alpha = p(f\mu_G)$ è una misura quasi invariante su X (segue dalla Proposizione 4.

3.5.2. *Unicità.* Se α_1, α_2 sono misure quasi invarianti su X, allora $\alpha_1 \simeq \alpha_2$. Infatti, $\alpha_1 = \alpha_{\rho_1}$ e $\alpha_2 = \alpha_{\rho_2}$, e si è visto che

$$\alpha_\rho(E) = 0 \Leftrightarrow \mu_G(p^{-1}(E)) = 0, \quad E \in \mathcal{B}(X).$$

3.5.3. *Misure invarianti su X.* Se α, β sono misure invarianti su X, allora $\alpha = k\beta$ per qualche $k \in \mathbb{R}_+$. Infatti, α_0 e β_0 sono misure invarianti su $G \Rightarrow \alpha_0 = k\beta_0 \Rightarrow \alpha = k\beta$ per l'iniettività di $\alpha \mapsto \alpha_0$. Si vede anche che α_0 è un multiplo di μ_G, cioè $\rho_\alpha = \text{cost}$. In particolare, $\Delta_H = \Delta_G|_H$. Viceversa, se $\Delta_H = \Delta_G|_H$ si può scegliere $\rho = 1$, e la corrispondente α_ρ è invariante.

4. Induzione da rappresentazioni di H e teorema di imprimitività

4.1. **La rappresentazione e il sistema di imprimitività indotti.** Per *rappresentazione* di un gruppo in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ (non necessariamente separabile) si intende un omomorfismo continuo dal gruppo stesso nel gruppo unitario di $\mathcal{H}$ dotato della topologia operatoriale forte (o, equivalentemente, debole). Due rappresentazioni di un gruppo sono *equivalenti* se esiste un operatore unitario che le intreccia. Se π, π' sono rappresentazioni dello stesso gruppo negli spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ rispettivamente, si indicherà con $\mathcal{C}(\pi; \pi')$ il sottospazio lineare degli operatori in $\mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$ che intrecciano π con π'. Se $\pi = \pi'$, si userà la notazione abbreviata $\mathcal{C}(\pi) = \mathcal{C}(\pi; \pi)$.

Nel seguito, supporremo fissata una rappresentazione σ di H nello spazio di Hilbert $\mathcal{K}$. α sarà una misura quasi invariante su X fissata, e $\rho : G \to \mathbb{R}$ sarà la funzione associata a α come nel Teorema 3.

Teorema 4. *Supponiamo che $F : G \to \mathcal{K}$ abbia le proprietà*

(1) *F è misurabile e $F(G)$ è un sottoinsieme separabile di $\mathcal{K}$;*
(2) *per ogni $h \in H$ e $g \in G$*

$$F(gh) = \left(\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right)^{1/2} \sigma(h)^{-1} F(g).$$

Allora sono fatti equivalenti

(i) *l'applicazione*

$$x \mapsto \frac{\|F(s(x))\|_{\mathcal{K}}^2}{\rho(s(x))}$$

è in $\mathcal{L}^2(X, \alpha)$;

(ii) (a) *l'applicazione*

$$g \mapsto \|F(g)\|_{\mathcal{K}}^2$$

è in $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(G, \mu_G)$;

(b) $\exists c > 0$ *t. c.*

$$\int_G f(g) \|F(g)\|_{\mathcal{K}}^2 \, d\mu_G(g) \le c \|Mf\|_\infty \quad \forall f \in C_c(G)_+.$$

Se uno dei precedenti fatti equivalenti è soddisfatto, allora

$$\int_X \frac{\|F(s(x))\|_{\mathcal{K}}^2}{\rho(s(x))} \, d\alpha(x)$$
$$= \inf \left\{ c > 0 \mid \int_G f(g) \|F(g)\|_{\mathcal{K}}^2 \, d\mu_G(g) \le c \|Mf\|_\infty \ \forall f \in C_c(G)_+ \right\}.$$

Dimostrazione. Se $F : G \to \mathcal{K}$ ha le proprietà (1) e (2), allora per la formula di Mackey-Bruhat

$$\int_G f(g) \|F(g)\|_{\mathcal{K}}^2 \, \mathrm{d}\mu_G(g) = \int_X Mf(x) \frac{\|F(s(x))\|_{\mathcal{K}}^2}{\rho(s(x))} \, \mathrm{d}\alpha(x)$$

per ogni $f \in C_c(G)_+$. Il teorema segue facilmente. $\square$

Nel seguito, $\mathcal{H}^\sigma$ denoterà lo spazio lineare delle funzioni $F : G \to \mathcal{K}$ che soddisfano le condizioni (1), (2) e (i) $\Leftrightarrow$ (ii) del teorema precedente. Per polarizzazione, in $\mathcal{H}^\sigma$ è definita una forma sesquilineare hermitiana semidefinita positiva

$$\langle \, F \mid G \, \rangle_{\mathcal{H}^\sigma} = \int_X \frac{\langle \, F(s(x)) \mid G(s(x)) \, \rangle_{\mathcal{K}}}{\rho(s(x))} \, \mathrm{d}\alpha(x)$$

(l'integranda è una funzione misurabile in virtù della misurabilità di ρ e del punto (1) del teorema precedente). $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{H}^\sigma}$ non dipende dalla scelta della sezione s (ovvio) nè dalla scelta della misura quasi invariante α (per il teorema precedente).

Siano

(2) $$U : \mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{L}^2(X, \alpha; \mathcal{K}), \qquad U^* : \mathcal{L}^2(X, \alpha; \mathcal{K}) \to \mathcal{H}^\sigma$$

le applicazioni date da

$$UF(x) = \frac{F(s(x))}{\rho(s(x))}$$
$$U^*\varphi(g) = \sqrt{\rho(g)}\sigma(g^{-1}s(p(g)))\varphi(p(g)).$$

Allora $UU^* = \mathrm{id}_{\mathcal{L}^2}$, $U^*U = \mathrm{id}_{\mathcal{H}^\sigma}$, e U, U^* intrecciano i rispettivi prodotti scalari di $\mathcal{H}^\sigma$ e $\mathcal{L}^2$. In particolare,

$$\mathrm{rad}\, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{H}^\sigma} = U^* \mathrm{rad}\, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2} = \{F \in \mathcal{H}^\sigma \mid F = 0 \ \mu_G\text{-quasi ovunque}\}$$

(Proposizione 4). Inoltre, $H^\sigma = \mathcal{H}^\sigma / \mathrm{rad}\, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{H}^\sigma}$ è uno spazio di Hilbert isomorfo tramite U a $L^2(X, \alpha; \mathcal{K})$. In particolare, H^σ è separabile se e solo se $\mathcal{K}$ è separabile.

Per ogni $g \in G$ si definisce l'operatore lineare $\lambda^\sigma(g) : \mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{H}^\sigma$ dato da

$$[\lambda^\sigma(g)F](g') = F(g^{-1}g').$$

Si vede facilmente che

- $\lambda^\sigma(g)$ è unitario in H^σ;
- $\lambda^\sigma(g_1)\lambda^\sigma(g_2) = \lambda^\sigma(g_1 g_2)$.

Per dimostrare che l'applicazione $G \ni g \mapsto \lambda^\sigma(g) \in \mathcal{L}(H^\sigma)$ è continua nella topologia operatoriale debole (quindi forte)

- si definisce il sottospazio $\mathcal{H}_c^\sigma \subset \mathcal{H}^\sigma$ delle funzioni
$$F_f(g) = \int_H \left(\frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}\right)^{1/2} \sigma(h) f(gh)\, \mathrm{d}\mu_H(h),$$
con $f \in C_c(G; \mathcal{K})$ (è un sottospazio di funzioni continue in $\mathcal{H}^\sigma$);
- si dimostra che $\mathcal{H}_c^\sigma$ è denso in $\mathcal{H}^\sigma$ (infatti
$$\langle\, F_f \mid F \,\rangle_{H^\sigma} = \int_G \langle\, f(g) \mid F(g) \,\rangle_{\mathcal{K}}\, \mathrm{d}\mu_G(g) \quad \forall F \in H^\sigma\ );$$
- si verifica che $\lambda^\sigma|_{\mathcal{H}_c^\sigma}$ è debolmente continua (segue dal fatto che, per la formula precedente,
$$\langle\, \lambda^\sigma(g) F_f \mid F \,\rangle_{H^\sigma} = \int_G \left\langle\, f(g^{-1}g') \mid F(g') \,\right\rangle_{\mathcal{K}} \mathrm{d}\mu_G(g')$$
e dal teorema della convergenza dominata, tenuto conto che $F \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(G, \mu; \mathcal{K})$);
- poiché $\|\lambda^\sigma(g)\| = 1\ \forall g$, segue che λ^σ è debolmente continua su tutto H^σ.

Definizione 2. λ^σ è la rappresentazione di G *indotta* dalla rappresentazione σ di H.

Per indicare in modo più chiaro il sottogruppo e la rappresentazione inducente, si userà anche la notazione $\lambda^\sigma = \mathrm{ind}_H^G(\sigma)$.

Si vede facilmente che l'isomorfismo unitario in 2 intreccia la rappresentazione λ^σ in H^σ con la rappresentazione $\tilde{\lambda}^\sigma$ in $L^2(X, \alpha; \mathcal{K})$, data da
$$[\tilde{\lambda}^\sigma(g)\varphi](x) = \left[\frac{\rho(g^{-1}s(x))}{\rho(s(x))}\right]^{1/2} \sigma(s(x)^{-1} g s(g^{-1}.x))\varphi(g^{-1}.x).$$

Supponiamo che σ' sia una seconda rappresentazione di H nello spazio di Hilbert $\mathcal{K}'$. Se $A \in \mathcal{C}(\sigma; \sigma')$, sia
$$[\tilde{A}F](g) = AF(g) \quad F \in \mathcal{H}^\sigma.$$
È immediato verificare che $\tilde{A}F \in \mathcal{H}^{\sigma'}$, e che $\tilde{A} \in \mathcal{C}\left(\lambda^\sigma; \lambda^{\sigma'}\right)$. L'applicazione lineare $\mathcal{C}(\sigma; \sigma') \ni A \mapsto \tilde{A} \in \mathcal{C}\left(\lambda^\sigma; \lambda^{\sigma'}\right)$ è iniettiva (facile da verificare), ma non è surgettiva (esistono controesempi).

Se $\varphi \in C_0(X)$, si definisce
$$[P^\sigma(\varphi)F](g) = \varphi(p(g))F(g) \quad F \in \mathcal{H}^\sigma.$$
È chiaro che $P^\sigma(\varphi)F \in \mathcal{H}^\sigma$, e che $P^\sigma : C_0(X) \to \mathcal{L}(H^\sigma)$ è una $*$-rappresentazione nondegenere ($P^\sigma(\varphi)F = 0\ \forall f \in C_0(X) \Rightarrow F = 0$) della C^*-algebra $C_0(X)$ in H^σ. Chiaramente
$$\lambda^\sigma(g)P^\sigma(\varphi)\lambda^\sigma(g)^{-1} = P^\sigma(g.\varphi),$$
dove $g.\varphi(x) = \varphi(g^{-1}.x)$.

Definizione 3. Una tripla $S = (\lambda, P, \mathcal{H})$ è un *sistema di imprimitività* per G basato su X se

(i) $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert;
(ii) λ è una rappresentazione di G in $\mathcal{H}$;
(iii) P è una $*$-rappresentazione nondegenere di $C_0(X)$ in $\mathcal{H}$;
(iv) è soddisfatta la condizione di covarainza

$$\lambda(g)P(\varphi)\lambda(g)^{-1} = P(g.\varphi) \quad \forall g \in G,\ f \in C_0(X).$$

Definizione 4. La tripla $S^\sigma = (\lambda^\sigma, P^\sigma, H^\sigma)$ definita sopra è il sistema di imprimitività *indotto* dalla rappresentazione σ di H.

Per indicare in modo più chiaro il sottogruppo e la rappresentazione inducente, si userà anche la notazione $S^\sigma = \mathrm{impr}_H^G(\sigma)$.

Se $S_1 = (\lambda_1, P_1, \mathcal{H}_1)$, $S_2 = (\lambda_2, P_2, \mathcal{H}_2)$ sono due sistemi di imprimitività per G basati su X, si pone

$$\mathcal{C}\left(S_1; S_2\right) = \{T \in \mathcal{C}\left(\lambda_1; \lambda_2\right) \mid TP_1(\varphi) = P_2(\varphi)T \ \forall \varphi \in C_0(X)\}.$$

S_1 e S_2 si dicono *equivalenti* se esiste un operatore unitario in $\mathcal{C}\left(S_1; S_2\right)$. Si userà la notazione abbreviata $\mathcal{C}\left(S\right) = \mathcal{C}\left(S; S\right)$.

4.2. **Il teorema di imprimitività.** I risultati centrali di questa sezione sono i Teoremi 5 e 6.

Lemma 2. *Sia $\mathcal{D} \subset H^\sigma$ con le seguenti proprietà:*

(1) *$\mathcal{D}$ è un sottoinsieme di funzioni continue;*
(2) *$\mathcal{D}$ è denso in H^σ.*

Allora l'insieme

$$\mathcal{K}_0 = \{F(g) \mid F \in \mathcal{D},\ g \in G\}$$

è totale in $\mathcal{K}$.

Dimostrazione. Poichè

$$\sigma(h)F(g) = \left(\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right)^{1/2} F(gh^{-1}),$$

$\mathrm{span}\{\mathcal{K}_0\}$ è un sottospazio σ-invariante di $\mathcal{K}$.

Supponiamo per assurdo $\mathcal{K}_1 = \mathrm{span}\{\mathcal{K}_0\}^\perp \neq \{0\}$. Sia $\sigma_1 = \sigma|_{\mathcal{K}_1}$. Allora $\mathcal{H}^{\sigma_1} \subset \mathcal{H}^\sigma$. Sia $F_0 \in \mathcal{H}_c^{\sigma_1}$ t. c. $\|F_0\|_{H^{\sigma_1}} = \|F_0\|_{H^\sigma} \neq 0$. Si ha $\langle F_0(g) \mid F(g) \rangle_{\mathcal{K}} = 0$ per ogni $F \in \mathcal{D}$ e $g \in G$. In particolare, $\langle F_0 \mid F \rangle_{H^\sigma} = 0$ per ogni $F \in \mathcal{D}$, contraddicendo la densità di $\mathcal{D}$. □

Se π è una rappresentazione di G in $\mathcal{H}$, per ogni $f \in C_c(G)$ si definisce

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v \, \mathrm{d}\mu_G(g) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

È facile verificare che $\pi(f) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right)$. Si definisce il *dominio di Gårding* di π

$$\mathcal{D}_\pi = \mathrm{span}\left\{\pi(f)v \mid f \in C_c(G),\ v \in \mathcal{H}\right\}.$$

Si verifica facilmente che

- se $f \in C_c(G)$, $g \in G$, allora
$$\pi(g)\pi(f) = \pi(g.f);$$
in particolare, $\mathcal{D}_\pi$ è π-invariante;
- $\mathcal{D}_\pi$ è denso in $\mathcal{H}$ (segue dall'esistenza di successioni di Dirac in $C_c(G)$);
- se π' è un'altra rappresentazione di G, allora $T\mathcal{D}_\pi \subset \mathcal{D}_{\pi'}$ per ogni $T \in \mathcal{C}(\pi; \pi')$.

Inoltre, è facile verificare che
$$\mathcal{D}_{\lambda^\sigma} = \operatorname{span}\{f * F \mid f \in C_c(G),\ F \in H^\sigma\},$$
dove $f * F(g) = \int_G f(g_1) F(g_1^{-1} g)\,\mathrm{d}\mu_G(g_1)$. In particolare, $\mathcal{D}_{\lambda^\sigma}$ è un sottospazio di funzioni continue in H^σ.

Lemma 3. *$\{F(1) \mid F \in \mathcal{D}_{\lambda^\sigma}\}$ è un sottospazio denso in $\mathcal{K}$.*

Dimostrazione. Segue dal Lemma 2, tenuto conto che $\mathcal{D}_{\lambda^\sigma}$ è λ^σ-invariante e $F(g) = [\lambda^\sigma(g^{-1})F](1)$ se $F \in \mathcal{D}_{\lambda^\sigma}$. □

Lemma 4. *Sia $\mathcal{D}$ un sottospazio lineare di H^σ con le seguenti proprietà*

(1) *$\lambda^\sigma(g)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ e $P^\sigma(\varphi)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ per ogni $g \in G$ e $\varphi \in C_c(X)$;*
(2) *$\mathcal{D}$ è un sottospazio di funzioni continue;*
(3) *lo spazio $\{F(1) \mid F \in \mathcal{D}\}$ è denso in $\mathcal{K}$.*

Allora $\mathcal{D}$ è un sottospazio denso in H^σ.

Dimostrazione. $\mathcal{D}^\perp$ è λ^σ-invariante, quindi $\mathcal{D}^\perp \cap \mathcal{D}_{\lambda^\sigma}$ è un sottospazio denso in $\mathcal{D}^\perp$. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione di Dirac in $C_c(G)$ centrata in 1, e $F \in \mathcal{D}$, $F' \in \mathcal{D}^\perp \cap \mathcal{D}_{\lambda^\sigma}$, allora
$$\begin{aligned} 0 &= \langle P^\sigma(M f_n)F \mid F' \rangle_{H^\sigma} = \int_G f_n(g) \langle F(g) \mid F'(g) \rangle_{\mathcal{K}} \,\mathrm{d}\mu_G(g) \\ &\to \langle F(1) \mid F'(1) \rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$
Segue che $F'(1) = 0$, quindi $F'(g) = 0$ per ogni g per la λ^σ-invarianza, e perciò $\mathcal{D}^\perp = 0$. □

Teorema 5 (Teorema di Imprimitività)**.** *Se $S = (\lambda, P, \mathcal{H})$ è un sistema di imprimitività per G basato su X, allora esiste una rappresentazione σ di H nello spazio di Hilbert $\mathcal{K}$ t. c. S è equivalente a* $\operatorname{impr}_H^G(\sigma)$.

Se $\mathcal{H}$ è separabile, allora $\mathcal{K}$ si può scegliere separabile.

Dimostrazione. Se $v, w \in \mathcal{H}$, la corrispondenza
$$C_c(G \times G) \ni \phi \mapsto \int_G \langle P(M\phi(\cdot, g))\lambda(g)v \mid w \rangle \,\mathrm{d}\mu_G(g) \in \mathbb{C}$$

definisce una misura di Radon complessa $\nu_{v,w}$ su $G \times G$. Infatti

$$\begin{aligned}\left|\int_G \langle\, P(M\phi(\cdot,g))\lambda(g)v \mid w \,\rangle \,\mathrm{d}\mu_G(g)\right| \\ \leq \int_G \|P(M\phi(\cdot,g))\| \,\|v\|\,\|w\| \,\mathrm{d}\mu_G(g) \\ \leq \int_G \|M\phi(\cdot,g)\|_\infty \,\|v\|\,\|w\| \,\mathrm{d}\mu_G(g).\end{aligned}$$

Se $\psi \in C_c(G\times G)$ è t. c. $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_{\operatorname{supp}\phi} = 1$, si ha

$$\begin{aligned}|[M\phi(\cdot,g_2)](p(g_1))| &= \left|\int_H \psi(g_1h,g_2)\phi(g_1h,g_2)\,\mathrm{d}\mu_H(h)\right| \\ &\leq \|\phi\|_\infty \int_H \psi(g_1h,g_2)\,\mathrm{d}\mu_H(h)\end{aligned}$$

e quindi

$$\left|\int_G \langle\, P(M\phi(\cdot,g))\lambda(g)v \mid w \,\rangle \,\mathrm{d}\mu_G(g)\right| \leq C_{\operatorname{supp}\phi}\,\|\phi\|_\infty\,\|v\|\,\|w\|\,,$$

dove $C_{\operatorname{supp}\phi}$ è una costante che dipende da $\operatorname{supp}\phi$.

Se $f, f_1, f_2 \in C_c(G)$, $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$, si ha

$$\begin{aligned}&\langle\, P(Mf)\lambda(f_1)v_1 \mid \lambda(f_2)v_2 \,\rangle \\ &= \int_{G\times G} f_1(g_2g_1)\overline{f_2(g_2)}\,\langle\, P(g_2^{-1}.Mf)\lambda(g_1)v_1 \mid v_2 \,\rangle \,\mathrm{d}(\mu_G\otimes\mu_G)(g_1,g_2) \\ &= \int_{G\times G\times G} f_1(g_2g_1)\overline{f_2(g_2)}f(g_2g_3)\,\mathrm{d}(\mu_G\otimes\nu_{v_1,v_2})(g_2,g_3,g_1) \\ &= \int_G f(g_2)\left[\int_{G\times G}\Delta_G(g_3)^{-1}f_1(g_2g_3^{-1}g_1)\overline{f_2(g_2g_3^{-1})}\,\mathrm{d}\nu_{v_1,v_2}(g_3,g_1)\right]\mathrm{d}\mu_G(g_2).\end{aligned}$$

Segue che esiste una misura di Radon complessa (e finita) $\tau_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}$ su G t. c.

$$\langle\, P(Mf)\lambda(f_1)v_1 \mid \lambda(f_2)v_2 \,\rangle = \tau_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}(f) \quad \forall f \in C_c(G).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}(g) &= \left[\int_{G\times G}\Delta_G(g_3)^{-1}f_1(gg_3^{-1}g_1)\overline{f_2(gg_3^{-1})}\,\mathrm{d}\nu_{v_1,v_2}(g_3,g_1)\right]\mathrm{d}\mu_G(g) \\ &= \rho_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}(g)\,\mathrm{d}\mu_G(g).\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che

(1) $\rho_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}$ è una funzione continua (teorema della convergenza dominata);
(2) $G\times G \ni (g_1,g_2) \mapsto \rho_{\lambda(g_1.f_1)v_1,\lambda(g_2.f_2)v_2}(1) \in \mathbb{C}$ è una funzione continua (teorema della convergenza dominata, tenuto conto che $\rho_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}(1)$ ha senso per il punto (1));

(3) per ogni $h \in H$

$$\rho_{\lambda(h.f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}(1) = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}\rho_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(h^{-1}.f_2)v_2}(1)$$

(facile conseguenza della definizione di $\tau_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}$).

In $\mathcal{D}_\lambda$ si definisce la forma sesquilineare hermitiana definita per linearità da

$$\langle\, \lambda(f_1)v_1 \mid \lambda(f_2)v_2 \,\rangle_0 = \rho_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}(1).$$

Dalla definizione di $\tau_{\lambda(f_1)v_1,\lambda(f_2)v_2}$ si vede facilmente che $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_0$ è semidefinita positiva in $\mathcal{D}_\lambda$. Denoteremo con $\mathcal{K}$ il completamento di $\mathcal{D}_\lambda/\mathrm{rad}\,\langle \cdot \mid \cdot \rangle_0$ a spazio di Hilbert. Posto

$$\sigma(h)\lambda(f)v = \left(\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right)^{1/2} \lambda(h.f)v \quad \forall h \in H,$$

σ si estende a omomorfismo unitario (per il punto (3)) debolmente continuo (per il punto (2)) di H in $\mathcal{K}$. Inoltre, posto

$$F_{\lambda(f)v}(g) = \lambda(g^{-1}.f)v,$$

si vede che

- $F_{\lambda(f)v} : G \to \mathcal{K}$ è continua (facile conseguenza del punto (2)), e quindi è misurabile e ha immagine separabile;
- per ogni $g \in G$, $h \in H$ si ha

$$F_{\lambda(f)v}(gh) = \left(\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right)^{1/2} \sigma(h)^{-1}F_{\lambda(f)v}(g)$$

  (immediato);
- per ogni $f, f_1, f_2 \in C_c(G)$, $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ vale

$$\int_G f(g)\,\big\langle\, F_{\lambda(f_1)v_1}(g) \mid F_{\lambda(f_2)v_2}(g) \,\big\rangle_{\mathcal{K}}\, \mathrm{d}\mu_G(g) = \langle\, P(Mf)\lambda(f_1)v_1 \mid \lambda(f_2)v_2 \,\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3}$$

  (facile calcolo, ricordando le varie definizioni).

Dal Teorema 4 segue che $F_{\lambda(f)v} \in \mathcal{H}^\sigma$.

Per l'eq. 3 e per la formula di Mackey-Bruhat

$$\int_X Mf(x)\frac{\big\langle\, F_{\lambda(f_1)v_1}(s(x)) \mid F_{\lambda(f_2)v_2}(s(x)) \,\big\rangle_{\mathcal{K}}}{\rho(s(x))}\, \mathrm{d}\alpha(x) = \langle\, P(Mf)\lambda(f_1)v_1 \mid \lambda(f_2)v_2 \,\rangle_{\mathcal{H}}\,. \tag{4}$$

Scelta una successione $\{(Mf)_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(X)$ t. c. $0 \le (Mf)_n \le 1$ e $(Mf)_n \uparrow 1$, dalla formula precedente segue

$$\big\langle\, F_{\lambda(f_1)v_1} \mid F_{\lambda(f_2)v_2} \,\big\rangle_{H^\sigma} = \langle\, \lambda(f_1)v_1 \mid \lambda(f_2)v_2 \,\rangle_{\mathcal{H}}\,.$$

Posto

$$W\lambda(f)v = F_{\lambda(f)v},$$

si vede quindi che W si estende per linearità a un'isometria $W : \mathcal{D}_\lambda \to H^\sigma$, e per continuità a un'isometria $W : \mathcal{H} \to H^\sigma$.

Si verifica facilmente che

$$W\lambda(g) = \lambda^\sigma(g)W \quad \forall g \in G$$
$$P(Mf) = W^* P^\sigma(Mf)W \quad \forall f \in C_c(G)$$

(la seconda equazione segue dall'eq. 4 e dalla densità di $\mathcal{D}_\lambda$). Il sottospazio lineare $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{P^\sigma(\varphi)Wv \mid \varphi \in C_c(X),\, v \in \mathcal{D}_\lambda\}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 4, quindi è denso in H^σ. Poiché

$$\begin{aligned}
\langle WW^* P^\sigma(\varphi_1)Wv_1 \mid P^\sigma(\varphi_2)Wv_2 \rangle_{H^\sigma} &= \langle W^* P^\sigma(\varphi_1)Wv_1 \mid W^* P^\sigma(\varphi_2)Wv_2 \rangle_{H^\sigma} \\
&= \langle P(\varphi_1)v_1 \mid P(\varphi_2)v_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle P(\varphi_1\varphi_2)v_1 \mid v_2 \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle W^* P^\sigma(\varphi_1\varphi_2)Wv_1 \mid v_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle P^\sigma(\varphi_1)Wv_1 \mid P^\sigma(\varphi_2)Wv_2 \rangle_{H^\sigma}
\end{aligned}$$

per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(X)$ e $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$, segue che $WW^* = \mathrm{id}_{H^\sigma}$, cioè W è un operatore unitario. Per densità di $C_c(X)$ in $C_0(X)$

$$WP(\varphi) = P^\sigma(\varphi)W \quad \forall \varphi \in C_0(X).$$

Infine, supponiamo $\mathcal{H}$ separabile. Se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_\lambda$ è una successione densa in $\mathcal{H}$, allora $\{Wv_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sottoinsieme di H^σ che soddisfa le ipotesi del Lemma 2. Scelta una successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ densa in G, il sottoinsieme $\mathcal{K}_0 = \{Wv_n(g_m) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ è perciò totale in $\mathcal{K}$, quindi $\mathcal{K}$ è separabile. □

Teorema 6. *Siano σ_1, σ_2 due rappresentazioni di H in $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ rispettivamente. Se $A \in \mathcal{C}(\sigma_1; \sigma_2)$, allora $\tilde{A} \in \mathcal{C}(S^{\sigma_1}; S^{\sigma_2})$, e l'applicazione $A \mapsto \tilde{A}$ è un isomorfismo dello spazio $\mathcal{C}(\sigma_1; \sigma_2)$ nello spazio $\mathcal{C}(S^{\sigma_1}; S^{\sigma_2})$.*

Dimostrazione. Solo la surgettività di $A \mapsto \tilde{A}$ è non banale. Se $T \in \mathcal{C}(S^{\sigma_1}; S^{\sigma_2})$, allora $T\mathcal{D}_{\lambda^{\sigma_1}} \subset \mathcal{D}_{\lambda^{\sigma_2}}$. Se $f \in C_c(G)$, $F \in \mathcal{D}_{\lambda^{\sigma_1}}$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_G |f_0(g)|^2 \, \|TF(g)\|^2_{\mathcal{K}_2} \, \mathrm{d}\mu_G(g) & \\
&= \|P^{\sigma_2}(Mf_0)TF\|^2_{H^{\sigma_2}} \\
&= \|TP^{\sigma_1}(Mf_0)F\|^2_{H^{\sigma_2}} \\
&\leq \|T\|^2 \, \|P^{\sigma_1}(Mf_0)F\|^2_{H^{\sigma_1}} \\
&= \|T\|^2 \int_G |f_0(g)|^2 \, \|F(g)\|^2_{\mathcal{K}_1},
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|TF(g)\|_{\mathcal{K}_2} \leq \|T\| \, \|F(g)\|_{\mathcal{K}_1} \quad \forall g \in G.$$

In particolare

$$\|TF(1)\|_{\mathcal{K}_2} \leq \|T\| \, \|F(1)\|_{\mathcal{K}_1}.$$

Poiché $\{F(1) \mid F \in \mathcal{D}_{\lambda^{\sigma_1}}\}$ è denso in $\mathcal{K}$ (Lemma 3), $\exists! A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_1; \mathcal{K}_2)$ t. c. $AF(1) = TF(1)$ per ogni $F \in \mathcal{D}_{\lambda^{\sigma_1}}$. È facile verificare che $A \in \mathcal{C}(\sigma_1; \sigma_2)$, e che $T = \tilde{A}$. □

Corollario 2. *Se $S = (\lambda, P, \mathcal{H})$ è un sistema di imprimitività per G basato su X, allora esiste un'unica (a meno di equivalenza) rappresentazione σ di H t. c. S è equivalente a* $\mathrm{impr}_H^G(\sigma)$.

Dimostrazione. Immediata conseguenza dei due teoremi precedenti. □

5. Rappresentazioni irriducibili di prodotti semidiretti

5.1. **La Macchina di Mackey.** Nel seguito, A e L sono gruppi topologici di Hausdorff localmente compatti e a base numerabile, A è abeliano, e L agisce in A tramite omomorfismi. La legge di composizione in A verrà denotata additivamente. L'azione di $l \in L$ su $a \in A$ sarà indicata $l[a]$. Esplicitamente, se $l, l_1, l_2 \in L$, $a, a_1, a_2 \in A$, si ha $l[a_1 + a_2] = l[a_1] + l[a_2]$, $(l_1 l_2)[a] = l_1[l_2[a]]$. Supporremo che l'applicazione $(l, a) \mapsto l[a]$ sia continua da $L \times A$ in A.

Sotto queste ipotesi, posto $G = A \times L$ e introdotti in G la legge di composizione

$$(a_1, l_1)(a_2, l_2) = (a_1 + l_1[a_2], l_1 l_2)$$

e l'inverso

$$(a, l)^{-1} = (-l^{-1}[a], l^{-1}),$$

G è un gruppo topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile, che si dice *prodotto semidiretto* di A e L, e si denota $G = A \rtimes L$.

Denoteremo con $\hat{A}$ il gruppo (topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile) dei caratteri unitari di A, e con $\langle \cdot\, , \cdot \rangle : \hat{A} \times \hat{A} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ il pairing canonico. L'azione di L in A genera per dualità una corrispondente azione di L in $\hat{A}$

$$\langle\, l[\chi]\, , \, a \,\rangle := \left\langle\, \chi\, , \, l^{-1}[a] \,\right\rangle \quad l \in L,\, \chi \in \hat{A},\, a \in A.$$

Per ogni $\chi \in \hat{A}$ introduciamo il sottogruppo chiuso di L (*sottogruppo di stabilità* di χ)

$$L_\chi = \{l \in L \mid l[\chi] = \chi\}$$

e il sottoinsieme di A (*orbita* passante per χ)

$$\mathcal{O}_\chi = L[\chi].$$

Definizione 5. Si dice che L *agisce regolarmente* in $\hat{A}$ se $\mathcal{O}_\chi$ è aperto in $\overline{\mathcal{O}_\chi}$ con la topologia relativa per ogni $\chi \in \hat{A}$.

Per la dimostrazione del teorema seguente, si rimanda a [5].

Teorema 7. *Sono fatti equivalenti:*

(i) *L agisce regolarmente in $\hat{A}$;*
(ii) *per ogni $\chi \in \hat{A}$ l'applicazione $L/L_\chi \ni lL_\chi \mapsto l[\chi] \in \mathcal{O}_\chi$ è un omeomorfismo;*
(iii) *esiste una successione $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\hat{A})$ t. c.*
  (a) *$l[E_j] = E_j$ per ogni $l \in L$, $j \in \mathbb{N}$;*
  (b) *$\mathcal{O}_\chi = \bigcap_{E_j \supset \mathcal{O}_\chi} E_j$.*

Supponiamo che π sia una rappresentazione di G nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Per il teorema di Stone-Naimark-Ambrose-Godement (SNAG) (vedi [4, Teorema 4.4]), esiste una mappa a valori nelle proiezioni (PVM, projection valued measure) $P : \mathcal{B}(\hat{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ t. c.

$$\pi(a,1) = \int_{\hat{A}} \langle \chi \,, a \rangle \, \mathrm{d}P(\chi) \quad \forall a \in A. \tag{5}$$

Proposizione 6. *Se π è irriducibile e L agisce regolarmente in $\hat{A}$, allora $\exists \chi \in \hat{A}$ t. c. $P(\mathcal{O}_\chi) =$ id. Inoltre, $P(\mathcal{O}_{\chi'}) = \mathrm{id}$ se e solo se $\chi' \in \mathcal{O}_\chi$.*

Dimostrazione. Se $E \in \mathcal{B}(\hat{A})$, allora dall'eq. 5 e dal fatto che $\pi(a,l)\pi(a',1)\pi(a,l)^{-1} = \pi(l[a'],1)$ segue che

$$\pi(a,l)P(E)\pi(a,l)^{-1} = P(l[E]) \quad \forall (a,l) \in G.$$

In particolare, se $l[E] = E$, allora $P(E) = 0$ o id per il lemma di Schur.

Se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{B}(\hat{A})$ come nel punto (iii) del Teorema 7, allora $\mathcal{O}_\chi = \bigcap_{E_j \supset \mathcal{O}_\chi} E_j$, da cui segue che

$$P(\mathcal{O}_\chi) = \mathrm{id} \Leftrightarrow P(E_j) = \mathrm{id}\, \forall j \in \mathbb{N}$$

(per la σ-additività di P). Segue che esiste χ t. c. $P(\mathcal{O}_\chi) = \mathrm{id}$ (altrimenti si troverebbe una sottosuccessione $\{E_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t. c. $\hat{A} = \bigcup_k E_{j_k}$ e $P(E_{j_k}) = 0\ \forall k$, in contrasto con $P(\hat{A}) = \mathrm{id}$) e che $P(\mathcal{O}_{\chi'}) = 0$ se $\chi' \notin \mathcal{O}_\chi$ (altrimenti si troverebbero j, k t. c. $E_j \cap E_k = \emptyset$, $\mathcal{O}_\chi \subset E_j$, $\mathcal{O}_{\chi'} \subset E_k$, e $P(E_j) = P(E_k) = \mathrm{id}$, da cui seguirebbe l'assurdo $P(\hat{A}) \geq 2\,\mathrm{id}$). $\square$

Nelle ipotesi della proposizione precedente, tramite l'omeomorfismo $G/(A \rtimes L_\chi) = L/L_\chi \simeq \mathcal{O}_\chi$ (punto (ii) del Teorema 7), P si trasporta a una PVM su $X = G/(A \rtimes L_\chi)$, che soddisfa

$$\pi(a,l)P(E)\pi(a,l)^{-1} = P(l.E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(X),\ (a,l) \in G.$$

Posto

$$P(\varphi) = \int_X \varphi(x)\, \mathrm{d}P(x) \quad \forall \varphi \in C_0(X) \tag{6}$$

(nel senso usuale dell'analisi funzionale), $P : C_0(X) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è una $*$-rappresentazione non-degenere di $C_0(X)$ in $\mathcal{H}$, e $S = (\pi, P, \mathcal{H})$ è un sistema di imprimitività per G basato su X. Per il Teorema di Imprimitività, $\exists!$ (a meno di equivalenza) σ rappresentazione unitaria di $H = A \rtimes L_\chi$ in $\mathcal{K}$ t. c. $S = \mathrm{impr}_H^G(\sigma)$. σ è irriducibile per il Teorema 6. Per l'eq. 5, con l'identificazione $\mathcal{O}_\chi = X$ si ha

$$\pi(a,1) = \int_X \langle g[\chi] \,, a \rangle \, \mathrm{d}P(p(g)) = P(\varphi_a) \quad \forall a \in A,$$

dove $\varphi_a(p(g)) = \langle g[\chi] \,, a \rangle$ e $P(\varphi_a)$ è definita come nell'eq. 6. Usando l'identificazione $S = S^\sigma$, scelta $F \in \mathcal{H}^\sigma$ continua, per ogni $g \in G$ si ha

$$\begin{aligned} \langle g[\chi] \,, a \rangle F(g) &= [P(\varphi_a)F](g) = [\pi(a,1)F](g) \\ &= F(gg^{-1}(a,1)^{-1}g) = \sigma(g^{-1}[a],1)F(g) \end{aligned}$$

($1 = \Delta_A = \Delta_G|_A = \Delta_H|_A$ perché A è abeliano normale). Poiché l'insieme $\{F(1) \mid F \in \mathcal{H}^\sigma$ e F è continua$\}$ è denso in $\mathcal{K}$ (Lemma 3), segue

$$\sigma(a,1) = \langle\, \chi\,,\, a \,\rangle \, \mathrm{id}_{\mathcal{K}} \quad \forall a \in A.$$

Perciò $\exists!$ (a meno di equivalenza) rappresentazione irriducibile σ_χ di L_χ in $\mathcal{K}$ t. c.

$$\sigma(a,l) = \langle\, \chi\,,\, a \,\rangle \, \sigma_\chi(l) \quad \forall (a,l) \in H.$$

Viceversa, se σ_χ è una rappresentazione irriducibile di L_χ in $\mathcal{K}$, allora σ definita come sopra è chiaramente una rappresentazione irriducibile di H. Per il Teorema 6, $\mathcal{C}\,(S^\sigma) = \mathbb{C}\mathrm{id}_{H^\sigma}$. Se $F \in \mathcal{H}^\sigma$ è continua, si ha

$$[\lambda^\sigma(a,1)F](g) = \sigma(g^{-1}(a,1)g)F(g) = \langle\, g[\chi]\,,\, a \,\rangle \, F(g) = [P^\sigma(\varphi_a)F](g),$$

cioè (con l'identificazione $X = \mathcal{O}_\chi$)

$$\lambda^\sigma(a,1) = \int_{\mathcal{O}_\chi} \langle\, \nu\,,\, a \,\rangle \; \mathrm{d}P^\sigma(\nu).$$

Per il teorema SNAG, $\{\lambda^\sigma(a,1) \mid a \in A\}' = \{P^\sigma(\varphi) \mid \varphi \in C_0(X)\}'$, e quindi $\mathcal{C}\,(\lambda^\sigma) \subset \mathcal{C}\,(S^\sigma)$. Segue che $\mathcal{C}\,(\lambda^\sigma) = \mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathcal{H}^\sigma}$, cioè λ^σ è irriducibile.

Teorema 8 ('Macchina di Mackey')**.** *Supponiamo che L agisca regolarmente in $\hat{A}$. Allora π è una rappresentazione irriducibile di G se e solo se $\exists \chi \in \hat{A}$ e σ_χ rappresentazione irriducibile di L_χ t. c. $\pi = \mathrm{ind}_{A \rtimes L_\chi}^G(\sigma)$, dove*

$$\sigma(a,l) = \langle\, \chi\,,\, a \,\rangle \, \sigma_\chi(l) \quad \forall (a,l) \in A \rtimes L_\chi. \tag{7}$$

Siano $\chi_1, \chi_2 \in \hat{A}$, $\sigma_{\chi_1}, \sigma_{\chi_2}$ rappresentazioni irriducibili di L_{χ_1} e L_{χ_2}, e σ_1, σ_2 le rispettive rappresentazioni di $A \rtimes L_{\chi_1}$ e $A \rtimes L_{\chi_2}$ costruite come in 7. Allora

(1) *se $\chi_2 \notin \mathcal{O}_{\chi_1}$, $\mathrm{ind}_{A \rtimes L_{\chi_1}}^G(\sigma_1)$ e $\mathrm{ind}_{A \rtimes L_{\chi_2}}^G(\sigma_2)$ sono inequivalenti;*
(2) *se $\exists l_0 \in L$ t. c. $\chi_2 = l_0[\chi_1]$, allora $\mathrm{ind}_{A \rtimes L_{\chi_1}}^G(\sigma_1)$ e $\mathrm{ind}_{A \rtimes L_{\chi_2}}^G(\sigma_2)$ sono equivalenti se e solo se σ_{χ_1} e $\sigma_{\chi_2}(l_0 \cdot l_0^{-1})$ sono rappresentazioni equivalenti di L_{χ_1}.*

Dimostrazione. Restano da dimostrare i punti (1) e (2).

(1) se $\chi_2 \notin \mathcal{O}_{\chi_1}$, allora $\mathcal{C}\,(\lambda^{\sigma_1}|_A\,;\lambda^{\sigma_2}|_A) = \{0\}$ per il teorema SNAG e per la Proposizione 6. Quindi $\mathcal{C}\,(\lambda^{\sigma_1};\lambda^{\sigma_2}) = \{0\}$.
(2) Se $\chi_2 = l_0[\chi_1]$, posto

$$\sigma_2'(a,l) = \sigma_2((0,l_0)(a,l)(0,l_0)^{-1}) = \langle\, \chi_1\,,\, a \,\rangle \, \sigma_{\chi_2}(l_0 l l_0^{-1}) \quad \forall (a,l) \in A \rtimes L_{\chi_1},$$

è facile verificare che $\mathrm{ind}_{A \rtimes L_{\chi_1}}^G(\sigma_2')$ e $\mathrm{ind}_{A \rtimes L_{\chi_2}}^G(\sigma_2)$ sono rappresentazioni equivalenti. La tesi segue dall'unicità (a meno di equivalenza) della rappresentazione σ_{χ_1} di L_{χ_1}.

□

5.2. **Esempi.**

5.2.1. *Il gruppo $ax+b$.* È il gruppo $G = A \rtimes L$, dove $A = \mathbb{R}$ (additivo), $L = \mathbb{R}_+$ (moltiplicativo), e l'azione di $l \in \mathbb{R}_+$ su $a \in \mathbb{R}$ è $l[a] = la$. Il duale di A è $\hat{A} = \mathbb{R}$, con pairing $\langle\, \chi\,,\, a \,\rangle = e^{i\chi a}$. L'azione di L in $\hat{A}$ è $l[\chi] = l^{-1}\chi$. Le orbite sono

$$\mathcal{O}_1 = (0, +\infty), \quad \mathcal{O}_0 = \{0\}, \quad \mathcal{O}_{-1} = (-\infty, 0),$$

e i corrispondenti sottogruppi di stabilità sono

$$L_1 = L_{-1} = \{1\}, \quad L_0 = \mathbb{R}_+.$$

L'azione di L in $\hat{A}$ è regolare. Per l'ultimo teorema nella sezione precedente le rappresentazioni irriducibili di G (tutte fra di esse inequivalenti) sono

$$\pi_+ = \mathrm{ind}_A^G(\langle\, 1\,,\, \cdot \,\rangle), \quad \pi_- = \mathrm{ind}_A^G(\langle\, -1\,,\, \cdot \,\rangle)$$

e le rappresentazioni irriducibili di L sollevate a rappresentazioni di G, cioè

$$\pi_t(a, l) = l^{it} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Usualmente, la realizzazione esplicita di $\mathrm{ind}_A^G(e^{i\cdot})$ e di $\mathrm{ind}_A^G(e^{-i\cdot})$ è data su $L^2\,(G/A, \alpha)$, con α misura invariante, piuttosto che su H^σ, usando l'equivalenza unitaria stabilita in 2. Si ha $X = G/A = \mathbb{R}_+$, l'azione di G su X è $(a,l).x = lx$, la sezione $s : X \to G$ è $s(x) = (0, x)$, e la misura invariante su X è $\mathrm{d}\alpha(x) = x^{-1}\,\mathrm{d}x$. Le rappresentazioni π_+, π_- agiscono in $L^2\,(\mathbb{R}_+, x^{-1}\,\mathrm{d}x)$, e

$$\begin{aligned}
[\pi_+(a,l)\varphi]\,(x) &= e^{iax^{-1}}\varphi(l^{-1}x) \\
[\pi_-(a,l)\varphi]\,(x) &= e^{-iax^{-1}}\varphi(l^{-1}x).
\end{aligned}$$

5.2.2. *Una variante del gruppo di Mautner.* Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il gruppo che considereremo in questa sezione è il prodotto semidiretto $G = A \rtimes L$, dove $A = \mathbb{C}$, $L = \mathbb{Z}$ (entrambi additivi), e l'azione di L su A è data da

$$n[z] = e^{i2\pi\alpha n}z \quad n \in \mathbb{Z},\, z \in \mathbb{C}.$$

Il duale di A è $\hat{A} = \mathbb{C}$, con pairing $\langle\, \chi\,,\, z \,\rangle = e^{i\Re\overline{\chi}z}$. L'azione di L su $\hat{A}$ è quindi $n[\chi] = e^{i2\pi\alpha n}\chi$, e le orbite sono

$$\mathcal{O}_\chi = \{e^{i2\pi\alpha n}\chi \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \chi \in \mathbb{C}.$$

Se $\chi \neq 0$, l'orbita $\mathcal{O}_\chi$ è densa in $S_{|\chi|} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |\chi|\}$ (è un applicazione elementare del 'principio dei cassetti', vedi p. es. Wikipedia alla voce 'Pigeonhole principle'). Se $U \subset \mathbb{C}$ è un aperto contenente $\mathcal{O}_\chi$, si vede facilmente che $U \cap \overline{\mathcal{O}_\chi} = S_{|\chi|} \neq \mathcal{O}_\chi$, cioè l'azione di L in $\hat{A}$ non è regolare. Il Teorema 8 non è dunque applicabile a G.

5.2.3. *Il gruppo di Heisenberg.* È il gruppo $G = A \rtimes L$, con $A = \mathbb{R}^2$, $L = \mathbb{R}$ (additivi), e con azione di L su A data da

$$q[(p,t)] = (p, t + qp), \quad q \in L,\, (p,t) \in A.$$

Il duale di A è $\hat{A} = \mathbb{R}^2$, con pairing

$$\langle\, (h,k)\,,\, (p,t) \,\rangle = e^{i(hp+kt)}, \quad (h,k) \in \hat{A},\, (p,t) \in A.$$

L'azione aggiunta di L su $\hat{A}$ è

$$q[(h,k)] = (h - kq, k).$$

Le orbite sono

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(0,k)} &= \mathbb{R} \times \{k\} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\\ \mathcal{O}_{(h,0)} &= \{(h,0)\} \quad h \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(tutte disgiunte fra loro), e i corrispondenti sottogruppi di stabilità sono

$$\begin{aligned}L_{(0,k)} &= \{0\} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\\ L_{(h,0)} &= \mathbb{R} \quad h \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

L'azione di L in $\hat{A}$ è regolare. Per l'ultimo teorema nella sezione precedente le rappresentazioni irriducibili di G (tutte fra di esse inequivalenti) sono

$$\pi_k = \mathrm{ind}_A^G(\langle\, (0,k)\, ,\, \cdot \,\rangle) \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e le rappresentazioni irriducibili di L sollevate a rappresentazioni di G, cioè

$$\pi_h((p,t),q) = e^{ihq} \quad h \in \mathbb{R}.$$

Anche in questo caso, la realizzazione più comune delle π_k è nello spazio $L^2\,(G/A, \alpha) = L^2\,(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ (*rappresentazione di Schrödinger*):

$$[\pi_k((p,t)q)\varphi](x) = e^{ik(t-px)}\varphi(x-q) \quad \varphi \in L^2\,(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)\,,$$

dove si è scelta la sezione $s : X \to G$, $s(x) = ((0,0),x)$.

5.2.4. *Il gruppo euclideo in dimensione n.* È il gruppo $G = A \rtimes L$, dove $A = \mathbb{R}^n$ (additivo), $L = SO(n)$, e l'azione di $l \in SO(n)$ su $a \in \mathbb{R}^n$ è quella usuale. In A è definito l'usuale prodotto scalare euclideo $(\cdot,\cdot) : A \times A \to \mathbb{R}$. Il duale di A è $\hat{A} = \mathbb{R}^n$, con pairing $\langle\, \chi\, ,\, a \,\rangle = e^{i(\chi,a)}$. Tramite $(\cdot,\cdot)$, A e $\hat{A}$ sono canonicamente identificati. Le orbite sono

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(r,0,0,\ldots)} &= \{\chi \in \mathbb{R}^n \mid (\chi,\chi) = r^2\} = S_r^{n-1} \quad r \in \mathbb{R}_+\\ \mathcal{O}_0 &= \{0\}\end{aligned}$$

(tutte disgiunte fra loro), e i corrispondenti sottogruppi di stabilità sono

$$\begin{gathered}L_{(r,0,0,\ldots)} = SO(n-1) \quad r \in \mathbb{R}_+\\ L_0 = SO(n).\end{gathered}$$

L'azione di L in $\hat{A}$ è regolare. Per l'ultimo teorema nella sezione precedente ogni rappresentazione irriducibile di G è univocamente identificata da una coppia (r,σ), con $r \in \mathbb{R}_+$ e σ rappresentazione irriducibile di $SO(n-1)$, oppure è una rappresentazione irriducibile di $L = SO(n)$ sollevata a rappresentazione di G.

5.2.5. *Il gruppo di Poincaré.* Sia $A = \mathbb{R}^4$ dotato dello pseudoprodotto scalare $(\cdot, \cdot) : A \times A \to \mathbb{R}$

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4.$$

Si ha un isomorfismo $M : \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Herm}(2)$ (= il sottospazio vettoriale reale delle matrici 2×2 complesse hermitiane) dato da

$$M(a) = \begin{pmatrix} a_4 + a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & a_4 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo $L = SL(2, \mathbb{C})$ agisce in A tramite

$$l[a] = M^{-1}(l M(a) l^*) \quad l \in SL(2, \mathbb{C}),\ a \in \mathbb{R}^4.$$

Il gruppo di Poincaré è il gruppo $G = A \rtimes L$.

Poiché

$$(a, a) = -\det M(a)$$

e $\det(l M(a) l^*) = \det M(a)$, segue che l'applicazione $l \mapsto l[\cdot]$ è un omomorfismo di L nel gruppo ortogonale $O(3, 1)$ di A. Il suo nucleo è $\{I, -I\}$. Poiché $SL(2, \mathbb{C})$ è un gruppo reale connesso e $\dim SL(2, \mathbb{C}) = \dim SO^0(3, 1)$ (= la componente di $O(3, 1)$ connessa con l'identità) segue che l'applicazione $l \mapsto l[\cdot]$ è un ricoprimento doppio di $SL(2, \mathbb{C})$ su $SO^0(3, 1)$.

Il gruppo duale di A è $\hat{A} = \mathbb{R}^4$, con pairing

$$\langle \chi \,, \, a \rangle = e^{i(\chi, a)}.$$

A si identifica in modo canonico con $\hat{A}$ tramite lo pseudoprodotto scalare $(\cdot, \cdot)$. Le orbite di $\hat{A}$ sotto l'azione di L sono dunque le orbite di $\mathbb{R}^4$ sotto l'azione di $SO^0(3, 1)$, cioè

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{O}_{(0,0,0,m)} & = & \{\chi \in \mathbb{R}^4 \mid (\chi, \chi) = -m^2,\ \chi_4 > 0\} & m \in \mathbb{R}_+ \\
\mathcal{O}_{(0,0,0,-m)} & = & \{\chi \in \mathbb{R}^4 \mid (\chi, \chi) = -m^2,\ \chi_4 < 0\} & m \in \mathbb{R}_+ \\
\mathcal{O}_{(0,0,1,1)} & = & \{\chi \in \mathbb{R}^4 \mid (\chi, \chi) = 0,\ \chi_4 > 0\} & \\
\mathcal{O}_{(0,0,-1,-1)} & = & \{\chi \in \mathbb{R}^4 \mid (\chi, \chi) = 0,\ \chi_4 < 0\} & \\
\mathcal{O}_{(0,0,r,0)} & = & \{\chi \in \mathbb{R}^4 \mid (\chi, \chi) = r^2\} \quad r \in \mathbb{R}_+ & \\
\mathcal{O}_0 & = & \{0\} &
\end{array}$$

(tutte disgiunte fra loro). I sottogruppi di stabilità corrispondenti sono

$$
\begin{aligned}
L_{(0,0,0,m)} &= L_{(0,0,0,-m)} = \{l \in SL(2,\mathbb{C}) \mid ll^* = I\} = SU(2) \\
L_{(0,0,1,1)} &= L_{(0,0,-1,-1)} = \left\{ l \in SL(2,\mathbb{C}) \mid l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} l^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & z \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R},\, z \in \mathbb{C} \right\} \simeq E(2) \\
L_{(0,0,r,0)} &= \left\{ l \in SL(2,\mathbb{C}) \mid l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} l^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= SU(1,1) \simeq SL(2,\mathbb{R}) \\
L_0 &= SL(2,\mathbb{C}),
\end{aligned}
$$

dove $E(2)$ è il gruppo euclideo in dimensione 2.

L'azione di L su $\hat{A}$ è regolare. La classificazione delle rappresentazioni irriducibili dei sottogruppi di stabilità precedenti è nota, e quindi la Macchina di Mackey fornisce tutte le rappresentazioni irriducibili di G.

Riferimenti bibliografici

[1] N. K. S. Poulsen, *Regularity Aspects of Infinite Dimensional Representations of Lie Group*, Ph. D. Thesis, M. I. T. Cambridge, Mass., (1970).

[2] B. Ørsted, *Induced representations and a new proof of the Imprimitivity theorem*, J. Funct. Anal. **31**, 355-359 (1979).

[3] V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, 2nd ed., Springer, New York (1985)

[4] G. B. Folland, *Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton (1995)

[5] J. Glimm, *Locally compact transformation groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **101, 124-138 (1961)**