

Università degli Studi di Genova

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Anno Accademico 2000/2001

Tesi di Laurea in Fisica

Modelli cosmologici in relatività generale.

Candidato:
Alessandro Toigo

Relatore:
Prof. Enrico Massa

Correlatore:
Prof. Renzo Collina

Introduzione

Le equazioni del campo in relatività generale costituiscono un sistema di equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali seconde. La richiesta che la loro soluzione ammetta simmetrie è un requisito del tutto indipendente dalla teoria della gravitazione, e costituisce una semplificazione notevole nella ricerca di modelli cosmologici che soddisfino le equazioni di Einstein. In aggiunta a questo, l'universo osservato sperimentalmente non sembra mostrare, nei dati finora raccolti, rilevanti disomogeneità nella distribuzione della materia, fornendo, così, un'ulteriore conferma alla validità di tale semplificazione.

L'argomento di questa tesi sarà lo studio e la classificazione delle soluzioni cosmologiche che ammettono le principali simmetrie, e l'illustrazione di alcuni modelli ad esse corrispondenti.

Dopo una concisa introduzione degli strumenti per l'analisi delle proprietà di simmetria di una varietà riemanniana (gruppi di Lie di trasformazioni, isometrie e spazi omogenei), e dopo aver definito la rappresentazione matematica delle quantità osservabili rilevanti in un modello cosmologico (espansione, rotazione, ecc.), si descriverà la costruzione e le proprietà principali dei modelli di Friedmann-Robertson-Walker, particolarmente importanti in quanto essi costituiscono una buona approssimazione dello stato attuale dell'universo. Un capitolo è dedicato allo studio dei modelli omogenei nello spazio e nel tempo, fisicamente meno significativi dei precedenti, tuttavia utili a mostrare col modello di Gödel alcune peculiarità (acausalità, rotazione) potenzialmente ammissibili dalle soluzioni delle equazioni di Einstein. Infine, si discuterà la classe dei modelli spazialmente omogenei. L'interesse fisico principale di quest'ultimi risiede nel fatto che, in generale, essi non sono isotropi, potendo quindi fornire una rappresentazione più realistica delle prime epoche dell'evoluzione dell'universo.

Per ogni tipo di simmetria si descriveranno nel dettaglio alcuni specifici modelli cosmologici corrispondenti, privilegiando talvolta nella scelta di quest'ultimi la presenza di caratteristiche peculiari rilevanti, rispetto all'effettivo realismo fisico.

Indice

1	Spazi omogenei.	5
1.1	Generalità sui gruppi di Lie.	5
1.2	Gruppi di trasformazioni.	9
1.3	Isometrie.	12
1.4	Spazi omogenei.	16
2	Richiami di relatività generale.	21
2.1	Idrodinamica relativistica.	21
2.2	Espansione, rotazione e deformazione di un fluido.	22
3	I modelli di Friedman-Robertson-Walker.	27
3.1	Spazi con curvatura costante.	27
3.2	Geometria delle sottovarietà ed esempi di varietà a curvatura costante.	30
3.3	I modelli di Friedman-Robertson-Walker.	33
3.4	Simmetrie dei modelli FRW.	37
3.5	Breve rassegna dei principali modelli FRW.	40
3.6	Proprietà fisiche dei modelli FRW.	47
4	Modelli omogenei nello spazio e nel tempo.	50
4.1	Generalità.	50
4.2	Determinazione delle costanti di struttura di G_4	52
4.3	Il teorema di Gödel.	58
4.4	Acausalità del modello di Gödel.	60
5	Il modello spazialmente omogeneo generale.	64
5.1	Definizione e caratteristiche principali.	64
5.2	Dati iniziali per le equazioni del campo gravitazionale.	66
5.3	Il modello vuoto spazialmente omogeneo di tipo I generale.	68
5.4	Diagonalizzazione del modello vuoto di tipo IX generale.	72
5.5	Il modello T-NUT-M.	76
5.6	Le geodetiche nel modello T-NUT-M.	80
A		86

Capitolo 1

Spazi omogenei.

1.1 Generalità sui gruppi di Lie.

Una varietà differenziabile G dotata di struttura di gruppo è detta un **gruppo di Lie** se e solo se l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \rightsquigarrow & gh^{-1} \end{array}$$

è differenziabile (cfr. [1], [2], [3]). Da ciò segue automaticamente la differenziabilità di entrambe le applicazioni:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \rightsquigarrow & g^{-1} \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \rightsquigarrow & gh \end{array} .$$

Per ogni $g \in G$ sono definite le applicazioni di **trasporto sinistro** e di **trasporto destro**, date rispettivamente dai diffeomorfismi:

$$\begin{array}{ccc} L_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \rightsquigarrow & gh \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} R_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \rightsquigarrow & hg \end{array} .$$

I push-forward associati a tali applicazioni saranno indicati rispettivamente con $(L_g)_*$ e con $(R_g)_*$.

Un campo vettoriale $X \in \mathcal{D}^1(G)$ si dice **left- [right-] invariante** se:

$$(L_g)_* X_h = X_{gh} \quad [(R_g)_* X_h = X_{hg}] \quad \forall g, h \in G.$$

I campi vettoriali left- [right-] invarianti formano uno spazio vettoriale \mathfrak{g} isomorfo allo spazio tangente a G nell'identità. Definita infatti:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \mathfrak{g} & \longrightarrow & T_e(G) \\ X & \rightsquigarrow & X_e \end{array}$$

si verifica facilmente che α è lineare, iniettiva ($\alpha(X) = \alpha(Y) \implies X_h = (L_h)_* X_e = (L_h)_* Y_e = Y_h \forall h \in G \implies X = Y$) e surgettiva ($v \in T_e(G) \implies$

la corrispondenza $h \rightsquigarrow X_h := (L_h)_* v$ definisce un campo left-invariante; infatti $(L_h)_* X_g = (L_h)_* (L_g)_* v = (L_{hg})_* v = X_{hg}$, mentre la differenziabilità di X segue dal fatto che, se $g(t)$ è una qualunque curva tangente a v , allora $h \rightsquigarrow X_h \equiv \left. \frac{d(hg(t))}{dt} \right|_{t=0}$ è una sezione differenziabile da G in $T(G)$. Perciò:

Teorema 1.1.1 \mathfrak{g} e $T_e(G)$ sono isomorfi.

Sia $\phi : M \rightarrow N$ è un'applicazione differenziabile da una varietà M ad una varietà N (non necessariamente un diffeomorfismo). Due campi vettoriali $X \in \mathcal{D}^1(M)$ e $Y \in \mathcal{D}^1(N)$ sono detti ϕ -relati se e solo se per ogni $x \in M$ sussiste la relazione: $(Y)_{\phi(x)} = \phi_*(X)_x$. Supposto X_1 ϕ -relato a Y_1 , e X_2 ϕ -relato a Y_2 , si dimostra facilmente che il commutatore $[X_1, X_2]$ è a sua volta ϕ -relato a $[Y_1, Y_2]$. Da quanto detto segue immediatamente che, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, allora anche $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. In altri termini, lo spazio vettoriale \mathfrak{g} con l'operazione $[\cdot, \cdot]$ è un'algebra di Lie (la linearità, l'antisimmetria e l'identità di Jacobi seguono dalle analoghe proprietà della derivata di Lie). In virtù dell'identificazione di \mathfrak{g} con $T_e(G)$ si conclude che lo spazio tangente $T_e(G)$ eredita da \mathfrak{g} la struttura di algebra di Lie.

Detta $\{X_1 \dots X_n\}$ una base di \mathfrak{g} , si definiscono le costanti di struttura c^i_{jk} relative alla base stessa tramite le relazioni:

$$[X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k.$$

Analogamente ai campi vettoriali left-invarianti, si definiscono le **p -forme left-invarianti**:

$$\omega \in \mathcal{G}^p(G) \text{ è left-invariante} \iff (L_g)^* \omega_{gh} = \omega_h \quad \forall g, h \in G.$$

Dalla relazione generale $d\phi^* = \phi^*od$, segue che, se ω è left-invariante, pure $d\omega$ lo è. In particolare: $\mathcal{G}^1(G) \cong \mathfrak{g}^*$, e se $\{\omega^1 \dots \omega^n\}$ è la base duale di $\{X_1 \dots X_n\}$, usando l'espressione generale per la derivata di Lie di una p -forma ϑ rispetto a un campo Y : $\mathcal{L}_Y \vartheta = Y \lrcorner d\vartheta + d(Y \lrcorner \vartheta)$, si ha:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k.$$

Un generico campo vettoriale su di una varietà M definisce localmente un gruppo a un parametro di diffeomorfismi; sussiste cioè il seguente teorema (facilmente dimostrabile usando il teorema di esistenza e unicità locale per la soluzione dei sistemi di equazioni differenziali alle derivate ordinarie):

Teorema 1.1.2 Se $X \in \mathcal{D}^1(M)$, $x_0 \in M$, allora esiste un intorno U_{x_0} e un'unica applicazione differenziabile $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_{x_0} \rightarrow M$ tale che $\forall x \in U_{x_0}$ la curva $t \rightsquigarrow \psi(t, x)$ sia tangente a X_x in $t = 0$, e risulti inoltre: $\psi(s+t, x) = \psi(s, \psi(t, x))$ per ogni $t, s, (t+s) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $x \in U_{x_0}$.

Nel caso dei campi vettoriali left- [right-] invarianti si ha in più che:

Teorema 1.1.3 *Le linee integrali dei campi $X \in \mathfrak{g}$ passanti per l'identità $e \in G$ sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di G .*

Dimostrazione. Sia: $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ un sottogruppo a un parametro di G , cioè: $L_{g(t)}g(s) = g(t)g(s) \equiv g(t+s)$. Se $X_{g(s)} = \frac{dg(s)}{ds}$ è il vettore tangente a g in $g(s)$ si ha:

$$(L_{g(t)})_* X_{g(s)} = (L_{g(t)})_* \frac{dg(s)}{ds} = \frac{dg(t+s)}{ds} = \frac{dg(t+s)}{dt}.$$

Se si pone $s = 0$ si ottiene: $(L_{g(t)})_* X_e = X_{g(t)} \implies g$ è una curva integrale del campo left-invariante generato da $X_e \in T_e(G)$. Viceversa, se X è un campo left-invariante segue dal teorema generale 1.1.2 che in un intorno U_e dell'identità esso genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_e \rightarrow G$. Il sottogruppo cercato è dato da: $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi((-\varepsilon, \varepsilon), e)^n$; poichè X è left-invariante, esso è tangente alla curva S in ogni suo punto. ■

Facendo uso del teorema precedente e dell'identità: $\frac{dR_h(g(t))}{dt} = \frac{dL_{g(t)}h}{dt}$ è facile provare che:

Teorema 1.1.4 *Un campo vettoriale $v^L \in \mathcal{D}^1(G)$ costituisce il generatore di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\Phi_t : G \rightarrow G$ del tipo $\Phi_t = L_{g(t)}$, in cui $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ indica un sottogruppo a un parametro di G , se e solo se v^L è un campo right-invariante.*

Vale anche l'analoga relazione tra generatori v^R di gruppi a un parametro di right-traslazioni e campi left-invarianti.

Il teorema 1.1.3 permette di mappare i vettori $v \in T_e(G)$ nei sottogruppi a un parametro $g_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ generati dai corrispondenti campi left- [right-] invarianti. Si ottiene così il **map-esponenziale**:

$$\begin{array}{ccc} \exp : T_e(G) & \longrightarrow & G \\ v & \rightsquigarrow & g_v(1) \end{array} \quad (1.1)$$

Poichè: $\exp(tv) = g_{tv}(1) = g_v(t)$, $g_v(t)g_v(s) = g_v(t+s)$, segue che si ha: $\exp(tv)\exp(sv) = \exp[(t+s)v]$.

Il map-esponenziale permette di introdurre un sistema di coordinate privilegiate in un intorno dell'identità di G per mezzo del seguente teorema:

Teorema 1.1.5 *$\exp : T_e(G) \rightarrow G$ è un diffeomorfismo da un intorno U_0 di $0 \in T_e(G)$ a un intorno U_e di $e \in G$.*

Dimostrazione. Introdotta una carta locale $(U, \{x^1 \dots x^n\})$ centrata in $e \in G$, la tabella di moltiplicazione del gruppo è rappresentata (localmente) da un sistema di n funzioni di $2n$ variabili $\psi^i(x^1 \dots x^n, y^1 \dots y^n)$ in base alla prescrizione:

$$x^i(gh) = \psi^i(x^1(g) \dots x^n(g), y^1(h) \dots y^n(h)).$$

Introdotta la notazione:

$$\psi_g^i(y^1 \dots y^n) := \psi^i(x^1(g) \dots x^n(g), y^1 \dots y^n), \quad (1.2)$$

la traslazione sinistra $L_g : G \rightarrow G$ è espressa in coordinate da:

$$x^i(L_g(h)) = \psi_g^i(x^1(h) \dots x^n(h)). \quad (1.3)$$

Si indicherà con $\theta_g : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ il push-forward $((L_g)_*)_e$. Per confronto con l'equazione 1.3, per ogni $v \in T_e(G)$ si ha l'espressione in componenti:

$$(\theta_g(v))^i = \left(\frac{\partial \psi_g^i}{\partial y^k} \right)_e v^k := \theta^i_k(g) v^k. \quad (1.4)$$

Si osservi che, in virtù dell'identificazione 1.2, lo Jacobiano $\theta^i_k(g)$ dipende in maniera differenziabile dal punto $g \in G$; in altri termini, la corrispondenza $(g, v) \rightsquigarrow \theta_g(v)$ descritta dall'equazione 1.4 definisce un'applicazione differenziabile $G \times T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ (o, se si preferisce, un'applicazione $G \times \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$). Ciò premesso, scelto ad arbitrio un elemento $v \in T_e(G)$, sia $g_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ il corrispondente sottogruppo a un parametro, visto come *curva* in G , passante per l'origine e . Per definizione, il vettore tangente alla curva $g_v(t)$ è allora univocamente caratterizzato dalle condizioni:

$$\frac{d}{dt} g_v(t) = \theta_{g_v(t)}(v). \quad (1.5)$$

In coordinate, introdotta la scrittura $x^i g_v(t) := g^i(t)$, la caratterizzazione del sottogruppo $g_v(t)$ poggia pertanto sul sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dg^i}{dt} = \theta^i_k(g^1 \dots g^n) v^k \quad (1.6)$$

coi dati iniziali $g^i(0) = x^i(e) = 0$. Essendo il secondo membro dell'equazione 1.6 differenziabile nel complesso delle variabili $g^1 \dots g^n, v^1 \dots v^n$, scelto ad arbitrio un compatto $\Delta \subset \mathbb{R}^4$, dal teorema di Cauchy seguono l'esistenza, l'unicità e la differenziabilità della soluzione $g^i(t, v^1 \dots v^n)$ con un dominio $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Delta$. Inoltre, dall'equazione 1.5 segue immediatamente l'identità

$$\frac{d}{dt} g^i(st) = \theta^i_k(g^1 \dots g^n) v^k s,$$

matematicamente equivalente (sempre a causa del teorema di Cauchy) all'identificazione $g_v(st) = g_{sv}(t)$. Pertanto, pur di contrarre dipendentemente Δ , è sempre possibile ingrandire ε , fino a renderlo maggiore di 1. Esiste pertanto un intorno aperto U_0 dell'origine di $T_e(G)$ in modo che l'applicazione $\exp(v) = g_v(1)$ sia ben definita e differenziabile $\forall v \in U_0$. Infine, dall'equazione 1.5 si ha immediatamente

$$\left. \frac{d}{dt} g_v(t) \right|_{t=0} = \theta_e(v) = v.$$

Pertanto, identificando nel modo naturale $T_0(T_e(G))$ con $T_e(G)$, si ha che $\exp_* : T_0(T_e(G)) \rightarrow T_e(G)$ coincide con $\text{id}_{T_e(G)}$, da cui segue che \exp è (localmente) un diffeomorfismo. ■

Ciò consente di usare come coordinate dei punti in $U_e \in G$ le componenti rispetto a una base fissata dei corrispondenti vettori in $T_e(G)$; tale sistema di coordinate si dice **normale**.

La corrispondenza fra gruppi e algebre di Lie è precisata dai tre seguenti teoremi (le dimostrazioni degli ultimi due si trovano per esempio in [2], [4]):

Teorema 1.1.6 *Due gruppi di Lie sono isomorfi in un intorno dell'identità se e solo se essi hanno algebre di Lie isomorfe.*

Dimostrazione. Se $G \cong G'$ (almeno in un intorno dell'identità) e se $\phi : G \rightarrow G'$ descrive tale isomorfismo, allora $\phi_* : T_e(G) \rightarrow T_e(G')$ è un isomorfismo fra le algebre di Lie dei due gruppi. L'implicazione inversa è provata nell'appendice A. ■

Teorema 1.1.7 (Ado) *Ogni algebra di Lie è l'algebra di un sottogruppo di $GL(n)$, con n opportuno.*

Teorema 1.1.8 *Esiste una corrispondenza biunivoca fra algebre di Lie e gruppi di Lie semplicemente connessi.*

1.2 Gruppi di trasformazioni.

Sia G un gruppo di Lie, M una varietà differenziabile. Un'applicazione differenziabile: $\sigma : G \times M \rightarrow M$ definisce un **gruppo di Lie di trasformazioni** se e solo se, posto: $\sigma_g(x) \equiv \sigma_x(g) \equiv \sigma(g, x)$, l'applicazione $\sigma_g : M \rightarrow M$ è tale che:

$$(\sigma_g \circ \sigma_h)(x) = \sigma(g, \sigma(h, x)) \equiv \sigma(gh, x) = \sigma_{gh}(x) \quad \forall g, h \in G, \forall x \in M.$$

Ne segue in particolare che: $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}$.

L'azione di G su M è detta:

- **effettiva (o fedele)** $\iff \sigma_g = \text{id}$ implica $g = e$;
- **libera** $\iff \forall g \neq e, \forall x \in M, \sigma_g(x) \neq x$;
- **transitiva** $\iff \forall x, y \in M \exists g \in G$ tale che $\sigma_g(x) = y$.

Se $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ è un sottogruppo a un parametro di G , esso genera un campo $X \in \mathcal{D}^1(M)$ definito da:

$$X_x = \left. \frac{d\sigma(g(t), x)}{dt} \right|_{t=0}.$$

I campi su M ottenibili in tal modo prendono il nome di **campi vettoriali fondamentali** (cfr. [2], [3], [5]). Nel seguito essi saranno indicati con X^F (o con v^F).

Poichè vi è una corrispondenza biunivoca fra sottogruppi a un parametro di G e vettori di $T_e(G)$, segue che ogni $v \in T_e(G)$ genera un corrispondente campo fondamentale $v^F \in \mathcal{D}^1(M)$ secondo la relazione:

$$v_x^F = \left. \frac{d\sigma(g_v(t), x)}{dt} \right|_{t=0} = (\sigma_x)_* v,$$

in cui $g_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ indica il sottogruppo a un parametro generato da v .

In generale lo spazio vettoriale dei campi fondamentali ha dimensione $r \leq p = \dim T_e(G) = \dim \mathfrak{g}$. In particolare, se σ definisce un'azione effettiva di G su M , allora $r = p$. Se infatti fosse $r < p$, vi sarebbe un sottogruppo a un parametro $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ non banale tale che:

$$v_{x_0}^F = \left. \frac{d\sigma_{x_0}(g(t))}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \forall x_0 \in M.$$

Fissato x_0 e posto: $x(t) = \sigma(g(t), x_0)$ si avrebbe:

$$0 = v_{x(t)}^F = \left. \frac{d\sigma_{x(t)}(g(s))}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\sigma_{x_0}(g(s+t))}{ds} \right|_{t=0} = \frac{d\sigma_{x_0}(g(t))}{dt}$$

e quindi: $\sigma_{x_0}(g(t)) = \text{costante} = \sigma_{x_0}(e) = x_0 \quad \forall x_0 \in M$, in contrasto con l'ipotesi di azione effettiva.

Sussiste il seguente importante risultato:

Teorema 1.2.1 *Sia $\{v_1 \dots v_p\}$ una base di $T_e(G)$. Siano $\{v_1^R \dots v_p^R\}$ e $\{v_1^L \dots v_p^L\}$ i corrispondenti campi left- e right-invarianti su G e $\{v_1^F \dots v_p^F\}$ i campi fondamentali (questi ultimi non necessariamente indipendenti) indotti dalla base stessa su M . Si hanno allora le relazioni di commutazione:*

$$[v_i^R, v_j^R] = c^k_{ij} v_k^R, \quad [v_i^L, v_j^L] = -c^k_{ij} v_k^L, \quad [v_i^F, v_j^F] = -c^k_{ij} v_k^F. \quad (1.7)$$

Dimostrazione. La prima relazione altro non è che la definizione delle costanti di struttura relative alla base assegnata. Detti inoltre u^L, v^L i campi right-invarianti generati da $u, v \in T_e(G)$, e u^L, v^L i corrispondenti campi left-invarianti, risulta:

$$\begin{aligned}
[u^L, v^L]_h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(L_{g_u(t)})^* v_{g_u(t)h}^L - v_h^L}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(L_{g_u(t)^{-1}})_* (R_{g_u(t)h})_* v - (R_h)_* v}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (R_h)_* \left[\frac{(L_{g_u(t)^{-1}})_* (R_{g_u(t)})_* - 1}{t} \right] v \\
[u^R, v^R]_h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(R_{g_u(t)})^* v_{hg_u(t)}^R - v_h^R}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (L_h)_* \left[\frac{(R_{g_u(t)^{-1}})_* (L_{g_u(t)})_* - 1}{t} \right] v \\
&= - \lim_{t \rightarrow 0} (L_h)_* \left[\frac{(L_{g_u(t)^{-1}})_* (R_{g_u(t)})_* - 1}{t} \right] v,
\end{aligned}$$

da cui in particolare:

$$[u^L, v^L]_e = - [u^R, v^R]_e.$$

Ciò prova la seconda delle 1.7. Un generico campo fondamentale v^F generato da $v \in T_e(G)$ soddisfa:

$$v_{\sigma(h,x)}^F = \frac{d\sigma(g_v(t), \sigma(h,x))}{dt} = \frac{d\sigma(g_v(t)h, x)}{dt} = (\sigma_x)_* (R_h)_* v = (\sigma_x)_* v_h^L,$$

da cui:

$$[u_{\sigma(h,x)}^F, v_{\sigma(h,x)}^F] = (\sigma_x)_* [u_h^L, v_h^L].$$

Da quest' ultima uguaglianza con $h = e$ segue la relazione:

$$[v_i^L, v_j^L] = -c^k_{ij} v_k^L \implies [v_i^F, v_j^F] = -c^k_{ij} v_k^F.$$

■

Si è visto che se l'azione di G su M è effettiva (o, in modo equivalente, se $g \rightsquigarrow \sigma_g$ è una rappresentazione fedele di G), allora lo spazio dei campi vettoriali fondamentali è isomorfo allo spazio $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$ dei campi vettoriali left-invarianti su G (e dunque allo spazio dei campi right-invarianti). Il

teorema 1.2.1 permette in più di stabilire che in questo caso lo spazio dei vettori fondamentali con l'operazione $[\cdot, \cdot]$ forma un'algebra di Lie isomorfa all'algebra dei campi vettoriali right-invarianti su G .

Fissato un punto qualunque $x_0 \in M$, il sottoinsieme $\sigma(G, x_0) \subset M$ è la superficie integrale passante per x_0 della distribuzione generata dai campi $\{v_1^F \dots v_p^F\}$, ed è pertanto una sottovarietà differenziabile di M con $\dim(\sigma(G, x_0)) \leq p$.

Si può dimostrare che localmente i risultati descritti possono essere invertiti; si ha cioè il seguente teorema:

Teorema 1.2.2 *Siano $\{X_1 \dots X_p\}$ campi vettoriali linearmente indipendenti definiti su una varietà M , e soddisfacenti relazioni di commutazione del tipo:*

$$[X_i, X_j] = -c^k_{ij} X_k \quad i, j = 1 \dots p$$

con c^i_{jk} costanti. Allora per ogni $x_0 \in M$ esiste un gruppo di Lie G e un'applicazione $\sigma : U_e \times U_{x_0} \rightarrow M$, con U_e, U_{x_0} intorno aperti rispettivamente di x_0 e dell'identità, in modo che σ definisce localmente un gruppo di Lie di trasformazioni per il quale $\{X_1 \dots X_p\}$ sono campi di vettori fondamentali.

1.3 Isometrie.

Sia $\phi : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Un campo tensoriale $t \in \mathcal{D}(M)$ si dice **invariante** rispetto a ϕ se e solo se $(\phi)^* t_{\phi(x)} = t_x \quad \forall x \in M$.

Un campo vettoriale $X \in \mathcal{D}^1(M)$ genera localmente un gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\psi_t : U_{x_0} \rightarrow M \quad \forall x_0 \in M, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ in base a quanto visto nel teorema 1.1.2. È evidente che, se $t \in \mathcal{D}(M)$ è invariante rispetto all'azione di ψ_s , allora si annulla la sua derivata di Lie:

$$(\mathcal{L}_X t)_x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\psi_s^* t)_x - t_x}{s} = 0.$$

Vale anche il risultato inverso: se X non è il vettore nullo (altrimenti esso genera la trasformazione identica e la dimostrazione è banale), esiste sempre un sistema di coordinate locali $\{x_1 \dots x_n\}$ in cui le componenti di X sono:

$$X^i = 0 \quad i = 1 \dots n-1, \quad X^n = 1.$$

In questo sistema di coordinate si ha:

$$\begin{aligned} \psi_s^i(x) &= x^i + \delta^i_n s, \\ \frac{\partial X^i}{\partial x^j} &= 0 \quad i = 1 \dots n, \\ (\mathcal{L}_X t)_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

La condizione $\mathcal{L}_X t = 0$ è pertanto equivalente al requisito che le componenti $t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_r}$ siano funzioni delle sole $\{x_1 \dots x_{n-1}\}$, la qual cosa implica automaticamente che t è invariante secondo ψ_g . Riassumendo:

Teorema 1.3.1 *Un campo tensoriale $t \in \mathcal{D}(M)$ è invariante rispetto al gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da $X \in \mathcal{D}^1(M)$ se e solo se $\mathcal{L}_X t = 0$.*

Un gruppo di Lie di trasformazioni: $\sigma : G \times M \rightarrow M$ su una varietà riemanniana M si dice un **gruppo di isometrie** di M se e solo se il tensore metrico $g \in \mathcal{D}_2(M)$ è invariante rispetto a $\sigma_h : M \rightarrow M \forall h \in G$. Si è visto in 1.1.5 che in un opportuno intorno $U_e \subset G$ dell'identità ogni punto $h \in U_e$ appartiene a un sottogruppo a un parametro $g : \mathbb{R} \rightarrow G$. Se G è connesso si può mostrare che $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_e)^n$, e quindi un campo tensoriale è invariante rispetto a $\{\sigma_g, g \in G\}$ se e solo se esso è invariante rispetto a $\{\sigma_g, g \in U_e\}$, cioè rispetto a $\{\sigma_{g(t)}, g(t) \in U_e\}$. Quest'ultimo insieme di gruppi a un parametro di diffeomorfismi di M genera lo spazio dei campi fondamentali $v^F \in \mathcal{D}^1(M)$, e quindi in base al teorema 1.3.1 si conclude che:

Teorema 1.3.2 *Un campo tensoriale $t \in \mathcal{D}(M)$ è invariante rispetto a un gruppo di Lie di trasformazioni se e solo se $\mathcal{L}_{v^F} t = 0$ per ogni campo fondamentale $v^F \in \mathcal{D}^1(M)$.*

Il teorema 1.3.2 riconduce la caratterizzazione dei gruppi di isometrie al requisito che $\mathcal{L}_{v^F} g = 0$ per qualunque campo fondamentale $v^F \in \mathcal{D}^1(M)$. I campi fondamentali associati a un gruppo di isometrie prendono il nome di **campi di Killing** (cfr. [2], [5], [6], [7]). Nel seguito essi saranno indicati col simbolo ξ .

Per un generico campo $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{D}^1(M)$, col calcolo diretto si verifica facilmente la relazione:

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{ij} = \xi_{i||j} + \xi_{j||i},$$

in cui il simbolo \parallel indica la derivazione covariante indotta dalla connessione Riemanniana, e $\xi_i = g_{ij} \xi^j$ sono le componenti covarianti di ξ . La condizione $\mathcal{L}_\xi g = 0$ è pertanto equivalente al sistema di equazioni differenziali (**equazioni di Killing**):

$$\xi_{i||j} + \xi_{j||i} = 0 \quad i, j = 1 \dots n. \quad (1.8)$$

Inoltre, se $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}^1(M)$ soddisfano $\mathcal{L}_{\xi_1} g = \mathcal{L}_{\xi_2} g = 0$, si avrà anche:

$$(\mathcal{L}_{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2}) g = a_1 \mathcal{L}_{\xi_1} g + a_2 \mathcal{L}_{\xi_2} g, \quad \mathcal{L}_{[\xi_1, \xi_2]} g = (\mathcal{L}_{\xi_1} \mathcal{L}_{\xi_2} - \mathcal{L}_{\xi_2} \mathcal{L}_{\xi_1}) g = 0,$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. I campi ξ soddisfacenti $\mathcal{L}_\xi g = 0$ formano pertanto uno spazio vettoriale, chiuso rispetto all'operazione $[\cdot, \cdot]$, ossia un'algebra di Lie. Per i teoremi 1.2.2 e 1.3.2 tali campi generano quindi localmente un gruppo di Lie di isometrie, del quale essi rappresentano i campi di Killing nel senso indicato al termine del teorema 1.2.2.

Si vuole ora stabilire quale sia la dimensione massima r dell'algebra di Lie formata dai campi ξ , o, equivalentemente, quale sia il numero massimo di soluzioni indipendenti delle equazioni di Killing 1.8 (cfr. [6], [7]). A tale riguardo, si osservi preliminarmente che tali equazioni sono equivalenti al requisito che la derivata covariante $\nabla \xi$ sia una 2-forma esatta, ossia che esista una 1-forma $\omega = \omega_i dx^i$ tale da rendere soddisfatta la relazione $\nabla \xi = d\omega$.

Infatti, nell'ipotesi di validità dell'equazione 1.8 si ha immediatamente $\xi_{i||j} = \frac{1}{2} (\xi_{i||j} - \xi_{j||i}) \implies \nabla \xi = d(\xi_i dx^i)$.

Viceversa, la validità di una relazione del tipo $\nabla \xi = d\omega$ implica automaticamente l'antisimmetria delle componenti $\xi_{i||j}$, e quindi le 1.8.

In virtù del Lemma di Poincarè, la condizione di integrabilità di $\nabla \xi = d\omega$ risulta essere $\xi_{[i||j]k} = 0$, ovvero scritta estesamente:

$$\xi_{i||jk} + \xi_{j||ki} + \xi_{k||ij} = 0.$$

In virtù delle equazioni di Killing stesse, quest'ultima può essere riscritta nella forma:

$$-\xi_{j||ik} + \xi_{j||ki} + \xi_{k||ij} = 0,$$

o anche, utilizzando l'identità di Ricci sulla commutazione delle derivate covarianti seconde:

$$\xi_{k||ij} = -\xi_p R^p{}_{jki}. \quad (1.9)$$

Le condizioni di integrabilità dell'equazione 1.9 sono a loro volta:

$$\xi_{k||ijl} - \xi_{k||ilj} = \xi_{p||i} R^p{}_{kjl} + \xi_{k||p} R^p{}_{ijl},$$

da cui:

$$\begin{aligned} -\xi_{p||l} R^p{}_{jki} + \xi_{p||j} R^p{}_{lki} - \xi_{p||i} R^p{}_{kjl} - \xi_{k||p} R^p{}_{ijl} &= \xi_p (R^p{}_{jki||l} - R^p{}_{lki||j}) \\ &= \xi^p (R_{kipj||l} + R_{kilp||j}) \\ &= \xi^p R_{ikjl||p}, \end{aligned}$$

ovvero, riutilizzando le equazioni di Killing:

$$\xi_{p||m} (\delta^m{}_j R^p{}_{lki} + \delta^m{}_k R^p{}_{ijl} - \delta^m{}_l R^p{}_{jki} - \delta^m{}_i R^p{}_{kjl}) = \xi^p R_{ikjl||p}. \quad (1.10)$$

Quanto detto è ulteriormente chiarito dai seguenti commenti:

- Le equazioni 1.9 implicano: $(\xi_{i||j} + \xi_{j||i})_{||k} = 0$. Le equazioni di Killing sono quindi (localmente) equivalenti alle equazioni 1.9 completate dal "dato iniziale" $\xi_{i||j} + \xi_{j||i} = 0$ in un punto preassegnato.

- Per contrazione con g^{ij} , tenuto conto delle equazioni di Killing, l'equazione 1.10 implica:

$$\begin{aligned}
\xi^p R_{kl||p} &= \xi^{p||i} R_{plki} - \xi^p{}_{||k} R_{pl} - \xi^p{}_{||l} R_{pk} - \xi^{p||j} R_{pkjl} \\
&= -\xi^p{}_{||k} R_{pl} - \xi^p{}_{||l} R_{pk} + \xi^{p||i} (R_{plki} + R_{ikpl}) \\
&= -\xi_{p||m} (\delta^m{}_k R^p{}_l + \delta^m{}_l R^p{}_k) = -\xi_{p||m} (\delta^m{}_k R^p{}_l - \delta^p{}_l R^m{}_k).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

- La condizione 1.10 vale identicamente in conseguenza delle equazioni di Killing se e solo se sono separatamente vere le equazioni:

$$\begin{aligned}
R_{ijkl||p} &= 0, \\
\delta^m{}_j R^p{}_{lki} + \delta^m{}_k R^p{}_{ijl} - \delta^m{}_l R^p{}_{jki} - \delta^m{}_i R^p{}_{kjl} &= \delta^p{}_j R^m{}_{lki} + \delta^p{}_k R^m{}_{ijl} \\
&\quad - \delta^p{}_l R^m{}_{jki} - \delta^p{}_i R^m{}_{kjl}.
\end{aligned}$$

Contraendo j con p ciò conduce alla relazione:

$$(n-1)R^m{}_{lki} = \delta^m{}_k R_{il} - \delta^m{}_i R_{kl};$$

contraendo ulteriormente l con i si ottiene:

$$(n-1)R^m{}_k = \delta^m{}_k R - R^m{}_k \implies R^m{}_k = \frac{R}{n} \delta^m{}_k, \tag{1.12}$$

da cui:

$$R_{mlki} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{mk}g_{il} - g_{mi}g_{kl}). \tag{1.13}$$

Raccogliendo i risultati, e osservando che da 1.11 e da 1.12 segue: $\frac{R}{n(n-1)} = \Omega = \text{costante}$ (in realtà questa è una proprietà generale delle varietà nelle quali il tensore di curvatura è dato da 1.13, cfr. il teorema 3.1.1 più avanti), si conclude che *la condizione di integrabilità delle equazioni 1.9 è automaticamente garantita dalle equazioni di Killing stesse se e solo se M è a curvatura costante* (cfr. §3.1).

In tale ipotesi, scelti ad arbitrio un punto $x \in M$, un vettore $X \in T_x(M)$ e un tensore doppio antisimmetrico $A \in \Lambda_x^2(M)$, esiste (localmente) una ed una sola soluzione delle equazioni di Killing soddisfacente i dati iniziali:

$$\xi_i(x) = X_i, \quad \xi_{i||j}(x) = A_{ij}.$$

Tale soluzione è ottenuta per serie, valutando le derivate successive $\xi_{k||ij}|_x, \xi_{k||ijl}|_x, \dots$ tramite la 1.9 e le sue derivate. Precisamente, dalla 1.9 si ha:

$$\xi_{k||ij} = A_{ki||j} = -\xi_p R^p{}_{jki},$$

da cui, per iterazione, essendo $R^p_{jki||l} = 0$, e valutando tutto nel punto x :

$$\begin{aligned}\xi_{k||ijl} &= -\xi_{p||l} R^p_{jki} = -A_{pl} R^p_{jki} \\ \xi_{k||ijlm} &= -\xi_{q||lm} R^q_{jki} = X_p R^p_{mql} R^q_{jki} \\ \xi_{k||ijklmn} &= A_{pk} R^p_{mql} R^q_{jki} \\ &\dots\end{aligned}$$

La soluzione dipende quindi *linearmente* dai dati X_p e A_{ij} . Da quanto detto segue elementarmente che *in una varietà a curvatura costante esistono $n\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ campi di Killing linearmente indipendenti. Nel caso in cui M non sia a curvatura costante, il numero di soluzioni indipendenti è certamente minore, in quanto l'equazione 1.10 e tutte le equazioni ottenute da questa per derivazione successiva e riutilizzo della 1.9 pongono vincoli algebrici sulla scelta dei dati X_i, A_{jk} .*

1.4 Spazi omogenei.

Una varietà M sulla quale un gruppo di Lie G agisce transitivamente è detta uno **spazio omogeneo**.

Descritta con $\sigma : G \times M \rightarrow M$ un'azione transitiva di G su M , per ogni $x \in M$ si definisce **sottogruppo di isotropia** di x il sottogruppo $H_x \subset G$ definito dalla relazione:

$$H_x = \{g \in G \mid \sigma(g, x) = x\}.$$

Si osservi che, per costruzione, H_x è un sottogruppo chiuso di G . Se x, y sono due punti di M , i sottogruppi H_x, H_y sono isomorfi: infatti, scelto $g \in G$ soddisfacente $y = \sigma(g, x)$, risulta: $H_y = gH_xg^{-1}$. Essendo H_x chiuso, ciascuno spazio quoziente G/H_x possiede una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione $(\dim G - \dim H_x)$ (cfr. [1]). Inoltre, $\forall x, y \in M$, gli spazi $G/H_x, G/H_y$ possono essere identificati tramite l'isomorfismo canonico:

$$G/H_x \ni hH_x \rightsquigarrow hH_xg^{-1} \in G/H_y.$$

L'applicazione:

$$\eta_x : \begin{array}{ccc} G/H_x & \longrightarrow & M \\ hH_x & \rightsquigarrow & \sigma(h, x) \end{array}.$$

è evidentemente iniettiva e surgettiva. Si può mostrare (cfr. [1]) che η_x è anche differenziabile. Dunque M e G/H_x sono diffeomorfi, e ciò vale per ogni scelta di $x \in M$. In particolare, se il gruppo in oggetto è un gruppo di isometrie su M , si ha:

$$\dim H = \dim G - \dim M \leq \frac{n(n+1)}{2} - n, \quad n = \dim M.$$

Un'azione (*non necessariamente transitiva*) di G su M è detta **semplicemente transitiva sui sottospazi** (o, più brevemente, **semplicemente transitiva**) se i vettori fondamentali $(v_i^F)_x = (\sigma_x)_* v_i$ generati da una base $\{v_1 \dots v_p\}$ di $T_e(G)$ sono linearmente indipendenti *in ciascun punto* $x \in M$. In tale ipotesi è possibile costruire localmente una base in $T(M)$ invariante rispetto all'azione di G . Si descriverà ora tale costruzione e se ne esamineranno alcune applicazioni.

Sia $\sigma : G \times M \rightarrow M$ l'azione semplicemente transitiva di un gruppo p -dimensionale G su una varietà M di dimensione n . In conseguenza dell'ipotesi di semplice transitività, dato un punto $x_0 \in M$, ogni sistema di coordinate $\{g^1 \dots g^p\} \in U \subset \mathbb{R}^p$ in un intorno aperto U_e dell'identità di G induce un corrispondente sistema di coordinate nella sottovarietà omogenea di M passante per x_0 : $\pi_{x_0} := \sigma(U_e, x_0)$ mediante l'omeomorfismo:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \pi_{x_0} \\ (g^1 \dots g^p) & \rightsquigarrow & \sigma(g(g^1 \dots g^p), x_0) \end{array} .$$

Si consideri un qualunque sottospazio $V \subset T_{x_0}(M)$ con $\dim V = n - p$ e tale che $V \cap T_{x_0}(\pi_{x_0}) = \{0\}$; si scelga ad arbitrio una sottovarietà $(n - p)$ -dimensionale $S \subset M$ tangente a V in x_0 . Indicato con $\{x^1 \dots x^{n-p}\} \in U' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ un sistema di coordinate locali in un opportuno intorno di x_0 in S , l'applicazione $\sigma = \sigma(g(g^1 \dots g^p), x(x^1 \dots x^{n-p}))$, con $x(x^1 \dots x^{n-p}) \in S$, rende $\{g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^{n-p}\} \in U \times U'$ un sistema di coordinate locali in M . Infatti, dalla semplice transitività di σ e dal fatto che $\sigma_e = \text{id}_M$ segue che $(\text{rank } \sigma)(e^1 \dots e^p, x_0^1 \dots x_0^{n-p}) = n$.

Nell'intorno aperto $U_{x_0} \subset M$ in cui tale sistema di coordinate è definito si possono estendere i vettori fondamentali valutati sulla sottovarietà S a campi $X_i \in \mathcal{D}^1(U_{x_0})$ come segue:

$$(X_i)_{(g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^{n-p})} = (\sigma_{g(g^1 \dots g^p)})_* (v_i^F)_{x(x^1 \dots x^{n-p})} \quad i = 1 \dots p.$$

Per la semplice transitività di σ i v_i^F sono linearmente indipendenti in ogni punto, e, poichè $\sigma_h : M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo, tali sono pure gli X_i . Si ha inoltre in U_{x_0} (con: $g = g(g^1 \dots g^p)$, $x = x(x^1 \dots x^{n-p})$):

$$\begin{aligned} (X_i)_{(g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^{n-p})} &= (\sigma_g)_* (v_i^F)_x = (\sigma_g)_* (\sigma_x)_* v_i = (\sigma_x)_* (L_g)_* v_i \\ &= (\sigma_x)_* (v_i^R)_g \quad i = 1 \dots p, \end{aligned}$$

dove $v_i \in T_e(G)$ genera il campo $v_i^F \in \mathcal{D}^1(M)$; da ciò si ricava che:

$$[X_i, X_j]_{(g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^{n-p})} = (\sigma_x)_* [v_i^R, v_j^R] = c^k_{ij} (X_k)_{(g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^{n-p})} .$$

Dalla definizione stessa degli X_i segue che essi sono invarianti rispetto all'azione del gruppo G ristretta a U_e . Pertanto gli X_i formano una base

invariante locale per lo spazio tangente alla sottovarietà omogenea passante per ogni $x \in U_{x_0}$. Gli X_i , $i = 1 \dots p$ possono essere completati a base dello spazio tangente a M con l'aggiunta dei campi:

$$X_{p+j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \quad j = 1 \dots n - p.$$

Oltre a commutare fra loro, questi commutano pure con i campi $\{X_1 \dots X_p\}$ e coi vettori fondamentali $\{v_1^F \dots v_p^F\}$. Indicato infatti con: $\varphi_\xi^j : U'_{x_0} \rightarrow U'_{x_0}$ il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da X_{p+j} , con $U'_{x_0} \subset U_{x_0}$, nel sistema di coordinate $\{g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^{n-p}\}$ per una generica coppia $g = g(g^1 \dots g^p) \in G$, $x = x(x^1 \dots x^{n-p}) \in S$ risulta:

$$\begin{aligned} (\varphi_\xi^j \circ \sigma)(g, x) &= \varphi_\xi^j(g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^{n-p}) = (g^1 \dots g^p, x^1 \dots x^j + \xi \dots x^{n-p}) \\ &= \sigma(g, \varphi_\xi^j(x)). \end{aligned}$$

Da ciò e dalla definizione stessa della derivata di Lie seguono elementarmente le relazioni: $(\mathcal{L}_{X_{p+j}})v_i^F = 0$ e $(\mathcal{L}_{X_{p+j}})X_i = 0$.

I campi $\{X_1 \dots X_n\}$ definiscono dunque in $T(M)$ una **base invariante** (localmente) rispetto all'azione semplicemente transitiva di G . Come già anticipato, tale base non è unica, ma dipende dalla scelta della sottovarietà S secante gli spazi omogenei.

In particolare, se M è una varietà riemanniana, con metrica g , e se G è un gruppo p -dimensionale di isometrie in M semplicemente transitivo, con $\{\xi_1 \dots \xi_p\}$ campi di Killing generati da G , allora le componenti del tensore g rispetto a una base invariante $\{X_1 \dots X_n\}$ sono tali che: $(\mathcal{L}_{\xi_i})(X_a, X_b) = \xi_i(g_{ab}) = 0$, $i = 1 \dots p$, $a, b = 1 \dots n = \dim M$, come segue facilmente dal fatto che la derivata di Lie è una derivazione che commuta con le contrazioni.

Facendo uso dei risultati precedenti, e restringendosi al caso di una varietà M di dimensione n con metrica g iperbolica su cui agisca un gruppo semplicemente transitivo G di isometrie con $\dim G = n - 1$, si vuole ora trovare una base invariante in cui l'espressione del tensore metrico sia particolarmente semplice.

Fissato un punto $x_0 \in M$ tale che per esso passi una superficie omogenea π_{x_0} non di tipo nullo, è definito in un intorno aperto di x_0 il campo $V \in \mathcal{D}^1(M)$ dei versori ortogonali alle superfici omogenee ($(V, V) = \pm 1$ a seconda che π_{x_0} sia di tipo tempo o di tipo spazio). Sia $\gamma_{x_0} = \gamma_{x_0}(\xi)$ la linea integrale del campo V uscente da x_0 . Come si è visto in precedenza, se $\{g^1 \dots g^{n-1}\}$ sono coordinate in un intorno dell'identità di G , allora l'applicazione: $\sigma = \sigma(g(g^1 \dots g^{n-1}), \xi)$ definisce coordinate locali $\{g^1 \dots g^p, \xi\}$ in un aperto $U_{x_0} \in x_0$ di M ; ciò è vero in quanto $V_{x_0} \notin T_{x_0}(\pi_{x_0})$. Si può dunque costruire una base invariante esattamente nello stesso modo visto sopra, essendo in questo caso $S \equiv \gamma_{x_0}$. Tale base sarà: $\left\{X_1 \dots X_{n-1}, X_n = \frac{\partial}{\partial \xi}\right\}$, con:

$$[X_n, X_i] = 0, \quad [X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k \quad i, j, k = 1 \dots n - 1.$$

Detta $\{\omega^1 \dots \omega^{n-1}, \omega^n = d\xi\}$ la corrispondente base duale, risulterà similmente:

$$d\omega^n = 0, \quad d\omega^i = -\frac{1}{2}c^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \quad i, j, k = 1 \dots n-1.$$

Le costanti $c^i{}_{jk}$ che compaiono nell'espressione precedente sono le costanti di struttura del gruppo G . Lungo γ_{x_0} è inoltre per costruzione: $(X_m, X_n)_{\gamma_{x_0}(\xi)} = \pm\delta_{mn}$, $m = 1 \dots n$, mentre dal fatto che $\xi_i((X_m, X_n)) = 0$ in U_{x_0} e che i campi $\{\xi_1 \dots \xi_{n-1}\}$ generano in ogni punto lo spazio tangente alle superfici omogenee segue che $(X_m, X_n) = \pm\delta_{mn}$ in tutto U_{x_0} ; analogamente si vede che, posto: $(X_i, X_j)_{\gamma_{x_0}(\xi)} = g_{ij}^\pm(\xi)$, $m = 1 \dots n$ lungo γ_{x_0} , allora $(X_i, X_j) = g_{ij}^\pm(\xi)$ in tutto U_{x_0} . (con g_{ij}^\pm si indicano le componenti di una metrica $(n-1)$ -dimensionale iperbolica o definita positiva a seconda che sia $(V, V) = 1$ o $(V, V) = -1$). La metrica di M si riscrive infine:

$$g = \pm d\xi \otimes d\xi + g_{ij}^\mp(\xi) \omega^i \otimes \omega^j. \quad (1.14)$$

È utile osservare che le curve $\gamma = \gamma(t)$ uscenti da π_{x_0} e definite in coordinate $\{x^1 = g^1 \dots x^{n-1} = g^{n-1}, x^n = \xi\}$ da:

$$x_\gamma^i = \text{costante}, \quad x_\gamma^n = t \quad i = 1 \dots n-1$$

sono geodetiche; ciò segue dal fatto che da 1.14 si ricava: $\Gamma_{pq}^n = 0$, $p, q = 1 \dots n$, e dunque le γ soddisfano l'equazione delle geodetiche; si ha inoltre $(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \pm 1 = \text{costante}$.

Capitolo 2

Richiami di relatività generale.

2.1 Idrodinamica relativistica.

È noto dalla relatività generale (cfr. [8], [9], [10]) che, in conseguenza delle **equazioni di Einstein** (in tutto il seguito esse si supporranno *senza costante cosmologica*):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

con $c = 1$, $G = (8\pi)^{-1}$, $\text{segn } g = (+, +, +, -)$, l'evoluzione del continuo (governata dall'equazione $T^{\mu\nu}{}_{\parallel\nu} = 0$ per il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$) segue direttamente dalle proprietà geometriche dello spazio-tempo \mathcal{V}_4 , ovvero dal fatto che, per le identità di Bianchi, il primo membro della 2.1 ha divergenza identicamente nulla.

Per una *polvere di particelle non interagenti* il tensore energia-impulso si scrive:

$$T^{\mu\nu} = \mu V^\mu V^\nu, \quad (2.2)$$

dove μ indica la **densità di massa propria**, definita da:

$$\mu = \frac{1}{\delta V_0} \sum_{P \in \delta V_0} (m_0)_P,$$

il tutto essendo valutato nel riferimento di quiete istantanea, mentre V^μ indicano le componenti della quadrivelocità. Le particelle del sistema compiono ciascuna un moto geodetico; l'annullarsi della divergenza di $T^{\mu\nu}$ è infatti equivalente a:

$$(\mu V^\mu V^\nu)_{\parallel\nu} = (\mu V^\nu)_{\parallel\nu} V^\mu + \mu V^\nu V^\mu{}_{\parallel\nu} = 0.$$

Essendo i due addendi rispettivamente parallelo e ortogonale a V , il requisito di annullamento della somma comporta l'annullamento simultaneo di

entrambi. Sussistono pertanto separatamente l'equazione di continuità per la quadricorrente materiale e l'equazione delle geodetiche:

$$\begin{aligned}(\mu V^\nu)_{\parallel\nu} &\equiv (J^\nu)_{\parallel\nu} = 0, \\ \nabla_V V &= \frac{DV}{D\tau} = 0.\end{aligned}$$

Per un *sistema di particelle soggetto a sole interazioni di contatto* si ha invece:

$$T^{\mu\nu} = \mu V^\mu V^\nu + S^{\mu\nu},$$

in cui $S_{\mu\nu}$ indica il **tensore degli sforzi relativistico** , definito dal requisito che nel riferimento di quiete istantanea le sue componenti siano puramente spaziali, e coincidano con le componenti del tensore degli sforzi classico t_{ij} . Per un fluido isotropo vale la legge di Pascal: la forza classica lungo un versore \vec{n} è data da: $t^{ij}n_j = pn^i$ (p è la pressione). Ciò conduce all'identificazione:

$$S^{\mu\nu} = p(g^{\mu\nu} + V^\mu V^\nu).$$

In quest'ultimo caso, contraendo la 2.1 rispetto a μ e ν , si ricava: $R = \mu - 3p$, e quindi:

$$R_{\mu\nu} = (\mu + p)V_\mu V_\nu + \frac{1}{2}(\mu - p)g_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Per un fluido isotropo le cinque equazioni $T^{\mu\nu}_{\parallel\nu} = 0$ e $V^\mu V_\mu = -1$ coinvolgono le sei incognite μ, V^μ, p ; si deve perciò ancora assegnare l'**equazione costitutiva** di p , che per un fluido perfetto è:

$$p = p(\mu). \quad (2.4)$$

Per una discussione dettagliata sul problema di Cauchy connesso al sistema di equazioni differenziali 2.1 alle derivate seconde nelle funzioni incognite $g_{\mu\nu}$ si rimanda alla sezione §5.2.

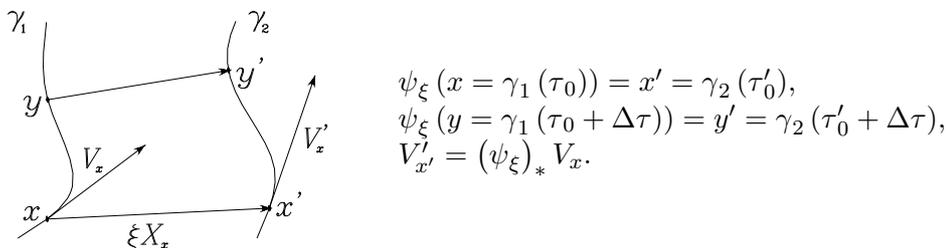
2.2 Espansione, rotazione e deformazione di un fluido.

Sia Γ una **congruenza** (o **tubo**) di **geodetiche** γ in \mathcal{V}_4 parametrizzate mediante il tempo proprio τ , e sia $V_x = \frac{D\gamma}{D\tau}(x)$ il corrispondente campo dei vettori tangenti. Un campo $X \in \mathcal{D}^1(\mathcal{V}_4)$ è detto un **vettore di connessione** per Γ se:

$$\mathcal{L}_X V = [X, V] = 0. \quad (2.5)$$

La condizione 2.5 implica che il gruppo a un parametro di diffeomorfismi ψ_ξ generato da X preserva il campo V , e quindi trasforma localmente curve

di Γ in curve di Γ , mantenendone immutata la parametrizzazione. Nel limite $\xi \rightarrow 0$, confondendo $\psi_\xi(x)$ con ξX_x , ciò è esemplificato dalla seguente figura:



La condizione 2.5 fornisce un sistema di quattro equazioni differenziali nelle quattro incognite $X^i(x^1 \dots x^4)$, che individuano il campo X a meno di condizioni iniziali. La libertà nella scelta di quest'ultime può essere usata per trovare un campo di connessione per Γ ortogonale a V . Indicato infatti con φ_t il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato (localmente) da V , con un ragionamento del tutto analogo a quello svolto in §1.4 a proposito dell'azione semplicemente transitiva di un gruppo su una varietà si vede che esiste una superficie π tale che $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \pi \rightarrow \mathcal{V}_4$ sia un diffeomorfismo. Si può ora fissare un campo di vettori $X \in \mathcal{D}^1(\pi)$ in modo che $(X, V)|_\pi = 0$, e trasportarli con $(\varphi_t)_*$ in un aperto U di \mathcal{V}_4 ; in U si avrà pertanto:

$$\mathcal{L}_V X = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_*(X_{\varphi(t,x)}) - X_x}{t} = 0 \quad x \in \pi,$$

cioè $[X, V] = 0$ in U . Inoltre (X, V) si annulla in tutto U ; infatti, indicata con ∇ la connessione riemanniana di \mathcal{V}_4 , per confronto con l'equazione 2.5 si ottiene l'identità:

$$0 = T(V, X) = \nabla_V X - \nabla_X V - [V, X] \implies \nabla_V X = \nabla_X V.$$

Da questa, ricordando che V è per definizione un campo di versori tangenti a geodetiche parametrizzate in modo affine, si ricava facilmente:

$$\frac{D}{D\tau}(X, V) = (\nabla_V X, V) + (X, \nabla_V V) = (\nabla_X V, V) = \frac{1}{2} \nabla_X (V, V) = 0.$$

A ogni osservatore \mathcal{O} 'liberamente cadente', ossia soggetto alle sole interazioni gravitazionali, è associata la geodetica γ corrispondente alla linea di universo di \mathcal{O} stesso. In ogni punto di γ lo spazio tangente a \mathcal{V}_4 si decompone nella parte tangente e nella parte ortogonale a γ . Più precisamente, detto τ un generico parametro affine lungo γ , si ha: $T_{\gamma(\tau)}(\mathcal{V}_4) = L(\dot{\gamma}(\tau)) \oplus \dot{\gamma}(\tau)^\perp$. Il sottospazio $\Sigma_{\gamma(t)} := \dot{\gamma}(\tau)^\perp$ definisce in ogni punto lungo γ la **piattaforma spaziale** di \mathcal{O} . Fissato un punto $x_0 \in \gamma$, una terna di vettori ortonormali $\{(e_1)_{x_0}, (e_2)_{x_0}, (e_3)_{x_0}\} \in \Sigma_{x_0}$ può essere trasportata parallelamente lungo la geodetica γ , o in altre parole può essere prolungata lungo γ in modo che $\frac{D e_i}{D\tau} = 0$. I vettori $\{e_1, e_2, e_3\}$ così definiti lungo la linea di universo

di \mathcal{O} individuano una **terna di assi non ruotanti** nel senso assoluto del termine¹.

In particolare, se in \mathcal{V}_4 è presente un fluido di particelle le cui linee di universo descrivono una congruenza di geodetiche Γ , è di particolare interesse studiarne l'evoluzione nel giudizio di un osservatore in moto lungo una curva $\gamma \in \Gamma$, ovvero solidale col fluido stesso. I vettori di connessione X ortogonali al campo delle velocità V giacciono in ogni punto di γ sulla piattaforma spaziale di tale osservatore. Se $(e_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ è una base ortonormale ortogonale a V e trasportata parallelamente lungo γ , si ha:

$$\frac{DX^i}{D\tau} = \nabla_V (X, e_i) = (\nabla_V X, e_i) + (X, \nabla_V e_i) = (\nabla_X V, e_i). \quad (2.6)$$

Completata la terna $(e_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ a base di $T(\mathcal{V}_4)$ coll'aggiunta del campo $e_4 = V$, e definite le quantità (calcolate lungo γ):

$$\begin{aligned} \theta &= V^\alpha{}_{\parallel\alpha}, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (V_{\mu\parallel\nu} - V_{\nu\parallel\mu}), \\ \sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (V_{\mu\parallel\nu} + V_{\nu\parallel\mu}) - \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

sussiste l'evidente relazione:

$$V_{\mu\parallel\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu},$$

per effetto della quale la 2.6 diventa:

$$\delta X^i = \left(\sigma^i{}_j + \omega^i{}_j + \frac{1}{3} \theta h^i{}_j \right) X^j \delta\tau. \quad (2.7)$$

In altre parole, secondo l'osservatore in moto solidale col fluido le particelle si discostano di una quantità δX in un tempo infinitesimo $\delta\tau$ secondo la relazione 2.7. Le quantità $\omega_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ sono rispettivamente le componenti di un tensore antisimmetrico, di un tensore simmetrico a traccia nulla e di un tensore simmetrico; nella base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ si ha: $\omega_{0\mu} = \sigma_{0\mu} = h_{0\mu} = 0$, e inoltre: $h_{ij} = \delta_{ij}$. La 2.7 mostra pertanto che l'osservatore vede una porzione di fluido nel suo intorno ruotare secondo ω_{ij} , espandersi secondo θ e deformarsi secondo σ_{ij} .

¹Nel caso più generale in cui \mathcal{O} non risulti in moto geodetico, la terna non ruotante si ottiene trasportando i vettori $\{(e_1)_{x_0}, (e_2)_{x_0}, (e_3)_{x_0}\} \in \Sigma_{x_0}$ in modo che $\frac{D_F e_i}{D\tau} = 0$, in cui con $\frac{D_F}{D\tau}$ si è indicata la **derivata di Fermi** lungo la curva γ (τ è l'ascissa curvilinea di γ). Tale operatore agisce sui vettori X definiti lungo γ stessa e tali che $(X, \dot{\gamma}) = 0$, ed è definito da: $\frac{D_F X}{D\tau} = \frac{DX}{D\tau} - (X, \frac{DV}{D\tau}) V$; in particolare, se γ è una geodetica, allora $\frac{D_F X}{D\tau} \equiv \frac{DX}{D\tau}$.

In una base olonoma generata dal sistema di coordinate $\{x^1 \dots x^4\}$ le $\omega_{\mu\nu}$ sono le componenti della 2-forma:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V_\sigma - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma V_\sigma \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -dV.\end{aligned}$$

L'assenza di rotazione è quindi equivalente al requisito che almeno localmente esista una $f = f(x^1 \dots x^4)$ tale che $V = df$, ossia che la varietà \mathcal{V}_4 sia fogliettabile mediante superfici ortogonali a V .

Affinchè una nuvola di particelle si muova seguendo una congruenza di geodetiche γ non è necessario che le particelle non interagiscano fra loro; per esempio, se $T^{\mu\nu} = \mu V^\mu V^\nu + S^{\mu\nu}$, è sufficiente che sia $S^{\mu\nu}{}_{\parallel\nu} = 0$, e ciò può aversi anche se $p \neq 0$ (per esempio, si vedrà che, per costruzione, nel più generale modello di Friedman-Robertson-Walker il moto del fluido è sempre geodetico). Dall'identità di Ricci:

$$V_\mu{}_{\parallel\alpha\beta} - V_\mu{}_{\parallel\beta\alpha} = R^\sigma{}_{\mu\alpha\beta} V_\sigma$$

saturando μ con α e contraendo con V_β si ha:

$$V^\beta \theta_{\parallel\beta} - V^\beta V^\mu{}_{\parallel\beta\mu} = -R_{\sigma\beta} V^\sigma V^\beta.$$

Poichè V è tangente alle geodetiche:

$$V^\beta V^\mu{}_{\parallel\beta\mu} = -V^\beta{}_{\parallel\mu} V^\mu{}_{\parallel\beta} = \omega^2 - \sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2$$

e quindi si ottiene l'**equazione di Raychaudhuri**:

$$R_{\sigma\beta} V^\sigma V^\beta = \omega^2 - \sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - V^\beta \theta_{\parallel\beta}. \quad (2.8)$$

Dalla 2.3 segue invece che:

$$R_{\sigma\beta} V^\sigma V^\beta = \frac{1}{2}(\mu + 3p),$$

da cui per il termine di espansione θ si ricava l'espressione:

$$V^\beta \frac{\partial \theta}{\partial x^\beta} + \frac{1}{3}\theta^2 = \omega^2 - \sigma^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p). \quad (2.9)$$

Se $p \geq -\frac{\mu}{3}$, in assenza di rotazione si ha:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0. \quad (2.10)$$

Se $\theta(\tau_0) \neq 0$ questa disuguaglianza può scriversi:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\theta} \right) \geq \frac{1}{3}$$

e quindi esiste un valore finito di τ per il quale $\theta \rightarrow \infty$. Questo risultato viene usato sovente per mostrare l'esistenza di singolarità in svariati modelli cosmologici.

Capitolo 3

I modelli di Friedman-Robertson-Walker.

3.1 Spazi con curvatura costante.

Sia V_2 una varietà riemanniana bidimensionale. È evidente che in questo caso l'unica componente indipendente del tensore di Riemann è R_{1212} , e si può sempre porre:

$$R_{1212} = K (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) = K \det g. \quad (3.1)$$

$K(x)$ non dipende dalla scelta della base in $T_x^*(V_2)$. Se infatti si effettua il cambiamento di base: $\omega^\mu = \omega'^\nu \beta_\nu^\mu$ si ha:

$$\begin{aligned} \det g' &= (\det \beta)^2 \det g, & R'_{1212} &= R_{\mu\nu\rho\sigma} \beta_1^\mu \beta_2^\nu \beta_1^\rho \beta_2^\sigma = R_{1212} (\det \beta)^2 \\ &\implies K'(x) = K(x). \end{aligned}$$

La funzione: $K : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **curvatura gaussiana** della varietà V_2 .

Sia ora M una varietà riemanniana con $\dim M > 2$. In ogni punto $x_0 \in M$ si può stabilire una corrispondenza biunivoca (e differenziabile) fra vettori in un intorno U_0 di 0 in $T_{x_0}(M)$ e punti in un intorno U_{x_0} di x_0 in M , in modo che a rette uscenti dall'origine in $T_{x_0}(M)$ e aventi $v \in U_0$ per vettore direzionale corrispondano localmente geodetiche uscenti da x_0 in U_{x_0} e aventi v per vettore tangente in x_0 ; per l'evidente analogia con quanto già visto nel caso dei gruppi di Lie, questo diffeomorfismo prende anch'esso il nome di **map-esponenziale**¹:

$$\begin{array}{ccc} \exp_{x_0} : U_0 & \longrightarrow & U_{x_0} \\ v & \rightsquigarrow & \gamma_v(1) \end{array},$$

¹Il map-esponenziale descritto in 1.1 per un gruppo di Lie G coincide con il map-esponenziale testè definito per le varietà riemanniane se in G si introduce la connessione naturale associata alla nozione globale di equipollenza indotta dal left-trasporto (cfr. [2]).

essendo γ_v la geodetica uscente da x_0 e avente ivi v per vettore tangente (cfr. [2], [3]). Il map-esponenziale permette di introdurre coordinate locali (dette **coordinate normali**) $\{x^1 \dots x^n\}$ in U_{x_0} associate a una base $\{X_1 \dots X_n\}$ di $T_{x_0}(M)$ secondo la relazione già vista nel Capitolo 1:

$$U_0 \ni x^i X_i \rightsquigarrow \exp_{x_0}(x^i X_i) \in U_{x_0}.$$

Due vettori $v_{(1)}, v_{(2)}$ non paralleli di $T_{x_0}(M)$ inducono un sottospazio bidimensionale di $T_{x_0}(M)$ e di conseguenza una sottovarietà V_2 in M :

$$L(v_{(1)}, v_{(2)}) \ni y^1 v_{(1)} + y^2 v_{(2)} \rightsquigarrow \exp_{x_0}(y^1 v_{(1)} + y^2 v_{(2)}) \in V_2;$$

$\{(y^\alpha)_{\alpha \in \{1,2\}}\}$ sono coordinate locali in un intorno di x_0 in V_2 .

Se V_2 non è una superficie di tipo nullo, la metrica \bar{g} indotta in V_2 dalla metrica g di M è:

$$\bar{g} = i^*(g) = i^*(g_{ij} dx^i \otimes dx^j) = g_{ij} v_{(\alpha)}^i v_{(\beta)}^j dy^\alpha \otimes dy^\beta = \bar{g}_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta.$$

La metrica \bar{g} induce in V_2 una connessione riemanniana $\bar{\nabla}$, i cui simboli di Christoffel possono essere calcolati come d'uso:

$$\overline{\{\alpha\beta; \gamma\}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\gamma}}{\partial y^\beta} + \frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} \right) = v_{(\alpha)}^i v_{(\beta)}^j v_{(\gamma)}^k \{ij; k\}. \quad (3.2)$$

Poichè $\{x^1 \dots x^n\}$ sono coordinate normali in M , $\forall w \in T_{x_0}(M)$ si ha per la geodetica $\gamma_w(s) = \exp_{x_0}(sw)$ passante per x_0 e ivi tangente a w :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D^2 \gamma_w}{Ds^2} = \frac{D}{Ds} \left(w^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\exp_{x_0}(sw)} \right) \iff 0 = (w^i \parallel_j w^j) |_{\exp_{x_0}(sw)} \\ &= w^j w^k \Gamma_{jk}^i(\exp_{x_0}(sw)). \end{aligned}$$

Quest' ultima relazione deve valere per qualunque $(w^1 \dots w^n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $i \in \{1 \dots n\}$. Deve quindi essere:

$$\Gamma_{ij}^k(x_0) = 0,$$

e dunque anche:

$$\{ij; k\}_{x_0} = 0. \quad (3.3)$$

In una generica varietà riemanniana il tensore di curvatura in forma completamente covariante è dato da:

$$R_{pqrs} = \frac{\partial}{\partial x^r} \{sq; p\} - \frac{\partial}{\partial x^s} \{rq; p\} + \left\{ \begin{matrix} t \\ rq \end{matrix} \right\} \{sp; t\} - \left\{ \begin{matrix} t \\ sq \end{matrix} \right\} \{rp; t\}. \quad (3.4)$$

Dalla 3.2, dalla 3.3 e dalla 3.4 segue che l'unica componente indipendente del tensore di Riemann $\bar{R} = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} dy^\alpha \otimes dy^\beta \otimes dy^\gamma \otimes dy^\delta$ di $(V_2, \bar{\nabla})$ in x_0 è:

$$(\bar{R}_{1212})_{x_0} = (R_{ijkl})_{x_0} v_{(1)}^i v_{(2)}^j v_{(1)}^k v_{(2)}^l.$$

Confrontando con la 3.1:

$$\bar{R}_{1212} = K (\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}) = K (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) v_{(1)}^i v_{(2)}^j v_{(1)}^k v_{(2)}^l$$

si ottiene l'espressione per K (valida se V_2 non è una superficie di tipo nullo):

$$K(x_0) = \frac{(R_{ijkl})_{x_0} v_{(1)}^i v_{(2)}^j v_{(1)}^k v_{(2)}^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) v_{(1)}^i v_{(2)}^j v_{(1)}^k v_{(2)}^l}. \quad (3.5)$$

$K(x_0)$ dipende solo dalla scelta della superficie V_2 e non dalla scelta dei vettori $v_{(1)}, v_{(2)}$ che la definiscono. In particolare, *se per ogni $x \in M$ il valore di $K(x)$ non dipende dalla scelta della superficie V_2 passante per x , allora M viene detta **varietà isotropa**. In questo caso, definito in M riferita a coordinate normali il tensore:*

$$S_{ijkl} = R_{ijkl} - K (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

dal fatto che $S_{ijkl} v_{(1)}^i v_{(2)}^j v_{(1)}^k v_{(2)}^l = 0 \forall v_{(1)}, v_{(2)} \in \mathbb{R}^n$ segue che:

$$S_{ijkl} + S_{kjil} + S_{ilkj} + S_{klij} = 0.$$

Combinando quest'ultima relazione col fatto che S_{ijkl} soddisfa le stesse proprietà di simmetria del tensore di Riemann, si ricava facilmente che $S = 0$. *Perciò M è una varietà riemanniana isotropa se e solo se in qualunque sistema di coordinate:*

$$R_{ijkl} = K (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (3.6)$$

Ogniqualevolta il tensore di Riemann ammette la rappresentazione 3.6, la funzione $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ è necessariamente costante; infatti $R_{ijkl|l} = \frac{\partial K}{\partial x^m} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ e dalle identità di Bianchi $R_{ij[kl|m]} = 0$, contraendo con g^{kl} , si ottiene:

$$(2 - n) \left(g_{il} \frac{\partial K}{\partial x^m} - g_{im} \frac{\partial K}{\partial x^l} \right) = 0.$$

Per $n > 2$, contraendo con g^{il} quest'ultima risulta equivalente a:

$$\frac{\partial K}{\partial x^m} = 0 \quad m = 1 \dots n,$$

che mostra che K è costante. Quindi:

Teorema 3.1.1 *Le varietà isotrope sono automaticamente **varietà a curvatura costante**.*

Sotto opportune ipotesi di analiticità, si può mostrare (cfr. Appendice B) che, in una generica varietà riemanniana M riferita a coordinate normali $\{x^1 \dots x^n\}$, nell'intorno di ciascun punto x_0 si può dare uno sviluppo in serie per le componenti del tensore metrico, in modo che i coefficienti dei termini di grado l dipendano solo da $g_{ij}(x_0)$ e dalle derivate covarianti fino all'ordine $(l-2)$ di R^i_{jkl} . Se il tensore di curvatura di M è tale che $\nabla R = 0$, allora M si dice **varietà simmetrica**, e i coefficienti dello sviluppo dipendono solo da $R_{ijkl}(x_0)$ come segue:

$$g_{ij}(x^1 \dots x^n) = g_{ij}(x_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^r x^{p_1} x^{q_1} \dots x^{p_r} x^{q_r} \cdot \left(R_{k_1 p_1 q_1 j} R^{k_1}_{p_2 q_2 k_2} \dots R^{k_{r-1}}_{p_r q_r i}\right) \Big|_{x_0}. \quad (3.7)$$

Ciò significa che *la geometria di una varietà simmetrica è completamente determinata una volta assegnati i valori del tensore metrico e del tensore di curvatura in un punto.*

Le varietà a curvatura costante sono evidentemente un caso particolare di varietà simmetriche. Dal discorso precedente segue che, *date due varietà M, N con la stessa curvatura costante K e con la stessa segnatura della metrica, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate nell'una in modo da ricondurre la metrica alla stessa forma che essa assume in un fissato sistema di coordinate dell'altra* (se le due metriche hanno diversa segnatura, la trasformazione di coordinate non è reale).

Sia data ora una varietà riemanniana M , con $n = \dim M > 2$, la cui metrica, in un sistema di coordinate $\{x^1 \dots x^n\}$, assume la forma:

$$g = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n e_i dx^i \otimes dx^i, \quad e_i = \pm 1, \quad \sigma = 1 + \frac{K}{4} \sum_{j=1}^n e_j (x^j)^2. \quad (3.8)$$

È facile verificare che M ha curvatura costante e pari a K . Quindi, *in ogni varietà riemanniana n -dimensionale a curvatura costante e con segn $g = (e_1 \dots e_n)$ è sempre possibile trovare un sistema di coordinate in cui la metrica assume la forma canonica 3.8.* In particolare, *una varietà piatta ammette coordinate pseudocartesiane.*

3.2 Geometria delle sottovarietà ed esempi di varietà a curvatura costante.

Data una sottovarietà (i, S) non di tipo nullo di una varietà riemanniana (M, ∇) , in ogni punto $x \in S$ si ha l'ovvia decomposizione: $T_x(M) = T_x(S) \oplus T_x(S)^\perp$. Dato un campo vettoriale $X \in \mathcal{D}^1(S)$, si indicherà con X' una

qualunque estensione di i_*X a un campo vettoriale definito in un aperto di M . Per ogni coppia di campi $X, Y \in \mathcal{D}^1(S)$, ciò comporta $[X', Y']_x = i_*[X, Y]_x \forall x \in S$, e quindi anche $[X', Y']_x \in T_x(S)$. Dato in un punto un vettore $Z \in T_x(S)$, è pure ben definita la derivata covariante: $(\nabla_Z X)_x := (\nabla_Z X')_x \in T_x(M)^2$. Si può pertanto decomporre $(\nabla_Z X)_x$ nelle sue parti parallela e ortogonale a $T_x(S)$ secondo: $(\nabla_Z X)_x = (\nabla_Z X)_x^\parallel + (\nabla_Z X)_x^\perp$.

Se si definisce l'operatore $\bar{\nabla}$ dalla relazione:

$$(\bar{\nabla}_Z X)_x = (\nabla_Z X)_x^\parallel \quad x \in S,$$

si verifica agevolmente che $(S, \bar{\nabla})$ è la *connessione riemanniana corrispondente alla metrica $\bar{g} = i^*(g)$ indotta in S dalla metrica g di M* (cfr. [3]). Per ogni coppia di campi vettoriali $X, Y \in \mathcal{D}^1(S)$ si ha similmente:

$$(\nabla_X Y)_x^\perp - (\nabla_Y X)_x^\perp = [X, Y]_x^\perp = 0 \implies (\nabla_X Y)_x^\perp = (\nabla_Y X)_x^\perp,$$

Ciò comporta la relazione: $(\nabla_{fX}(gY))_x^\perp = f(\nabla_X(gY))_x^\perp = f(\nabla_{gY}X)_x^\perp = fg(\nabla_X Y)_x^\perp$ per ogni $f, g \in \mathcal{F}(M)$, la quale mostra che per $x \in S$ è ben definita l'applicazione bilineare simmetrica (detta **seconda forma fondamentale** di S):

$$S_x : \begin{array}{ccc} T_x(S) \times T_x(S) & \longrightarrow & T_x(S)^\perp \\ (X_x, Y_x) & \rightsquigarrow & (\nabla_X Y)_x^\perp \end{array},$$

dove $X, Y \in \mathcal{D}^1(S)$ sono campi che prolungano X_x, Y_x .

Se $N \in T_x(S)^\perp$, si può ancora introdurre l'operatore:

$$A_N : T_x(S) \longrightarrow T_x(S),$$

definito dal requisito che per ogni scelta di una coppia di vettori $V, Z \in T_x(S)$ sia:

$$(A_N V, Z) = -(S(V, Z), N). \quad (3.9)$$

Se si estendono localmente i vettori N, Z a campi vettoriali N', Z' definiti in un aperto di M , dalla 3.9 e dalla definizione di S si ha:

$$\begin{aligned} (A_N V, Z) &= -\left((\nabla_V Z')_x^\perp, N\right) = (Z, (\nabla_V N')_x) \\ &= \left(Z, (\nabla_V N')_x^\parallel\right) \quad \forall V, Z \in T_x(S), \end{aligned}$$

²Tale definizione non dipende nei punti $x \in S$ dalla scelta del campo X' che estende X . Se infatti si scelgono coordinate $\{x^\alpha, \alpha = 1 \dots m = \dim M\}$ in M , in modo che la superficie p -dimensionale S sia data in forma implicita dal sistema di equazioni $x^\alpha = 0, \alpha = m-p+1 \dots m$, usando la convenzione per cui gli indici latini corrono da 1 a $m-p+1$, si ha:

$$\begin{aligned} (\nabla_Z X')_x &= Z^i \left(\frac{\partial (X')^\alpha}{\partial x^i} + (X')^\beta \Gamma_{i\beta}^\alpha \right) \Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x \\ &= Z^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x + \left(\Gamma_{ij}^\alpha X^j \right) \Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x. \end{aligned}$$

da cui segue che:

$$A_N V = (\nabla_V N') \Big|_x.$$

È ora facile verificare che $\forall U, V, W \in T_x(S)$:

$$[R(U, V) W]^\parallel = \bar{R}(U, V) W + A_{S(V, W)} U - A_{S(U, W)} V, \quad (3.10)$$

dove \bar{R} è il tensore di curvatura di $(S, \bar{\nabla})^3$.

Sia data ora in \mathbb{R}^{m+1} ($m \geq 2$) con metrica euclidea $g = \delta_{ij} \vec{e}^{*i} \otimes \vec{e}^{*j}$ la sfera m -dimensionale di raggio ρ con centro nell'origine:

$$S_\rho^m = \left\{ (x^1 \dots x^{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} (x^i)^2 = \rho^2 \right\},$$

e sia: $\vec{n} = \frac{1}{\rho} (P - O) \in T_P(S_\rho^m)^\perp$ il versore normale uscente da S_ρ^m in P . Indicato con \vec{n}' un prolungamento di \vec{n} in un intorno di P , se $\vec{x} \in T_P(S_\rho^m)$ si ha:

$$A_{\vec{n}} \vec{x} = (\nabla_{\vec{x}} \vec{n}') \Big|_P = x^j n^i \Big|_j (P) \vec{e}_i = \frac{1}{\rho} \vec{x}.$$

Dalla 3.9, poichè \vec{n} genera $T_P(S_\rho^m)^\perp$, segue che: $S(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{\rho} (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{n}$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in T_P(S_\rho^m)$, e quindi dalla 3.10 si ottiene ($\vec{z} \in T_P(S_\rho^m)$):

$$\bar{R}(\vec{x}, \vec{y}) \vec{z} = \frac{1}{\rho^2} [(\vec{y} \cdot \vec{z}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y}].$$

Ciò mostra che, rispetto alla metrica indotta: $\bar{g} = i_{S_\rho^m}^*(g)$, S_ρ^m è una varietà riemanniana m -dimensionale con curvatura $K = \frac{1}{\rho^2}$ costante e con metrica definita positiva.

In \mathbb{R}^{m+1} ($m \geq 2$) con metrica pseudoeuclidea $g = \eta_{ij} \vec{e}^{*i} \otimes \vec{e}^{*j}$, $\eta = \text{diag}(1 \dots 1, -1)$, l'iperboloide è definito come il luogo dei punti:

$$\begin{aligned} H_\rho^m &= \left\{ (x^1 \dots x^{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid f(x) = \sum_{i=1}^m (x^i)^2 - (x^{m+1})^2 \right. \\ &= \left. -\rho^2, x^{m+1} \geq \rho \right\}. \end{aligned}$$

In forma covariante il versore uscente è dato da: $g(\vec{n}) = \frac{df}{2\rho} = \sum_{i=1}^m \frac{x^i}{\rho} \vec{e}^{*i} - \frac{x^{m+1}}{\rho} \vec{e}^{*(m+1)}$, da cui: $\vec{n} = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{x^i}{\rho} \vec{e}_i$. Analogamente a quanto fatto in

³Infatti:

$$\begin{aligned} [R(U, V) W]^\parallel &= \{ \nabla_U [\bar{\nabla}_{V'} W' + S(V', W')] - \nabla_V [\bar{\nabla}_{U'} W' + S(U', W')] \\ &\quad - \bar{\nabla}_{[U', V']_x} W' - S([U', V']_x, W) \} \\ &= \bar{\nabla}_U \bar{\nabla}_{V'} W' - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{U'} W' - \bar{\nabla}_{[U', V']_x} W' + A_{S(V, W)} U - A_{S(U, W)} V \\ &= \bar{R}(U, V) W + A_{S(V, W)} U - A_{S(U, W)} V, \end{aligned}$$

dove U', V', W' prolungano U, V, W in un aperto di M .

precedenza, osservando che nel caso attuale sussiste la normalizzazione $\vec{n} \cdot \vec{n} = -1$, risulta:

$$A_{\vec{n}} \vec{x} = \frac{1}{\rho} \vec{x}, \quad S(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{\rho} (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{n},$$

$$\bar{R}(\vec{x}, \vec{y}) \vec{z} = -\frac{1}{\rho^2} [(\vec{y} \cdot \vec{z}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y}],$$

per ogni $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ tangenti a H_ρ^m . Dunque H_ρ^m con la metrica indotta da $g = \eta_{ij} \vec{e}^{*i} \otimes \vec{e}^{*j}$ è il prototipo di varietà riemanniana m -dimensionale con curvatura $K = -\frac{1}{\rho^2}$ costante e con metrica definita positiva.

Non è difficile dimostrare che ogni iperpiano in \mathbb{R}^{m+1} con metrica euclidea (o, equivalentemente, ogni iperpiano di tipo spazio in \mathbb{R}^{m+1} con metrica pseudoeuclidea) è una sottovarietà di dimensione m a curvatura nulla e con metrica definita positiva.

È utile infine osservare che fra gli spazi a curvatura costante e con metrica definita positiva solo quelli con $K > 0$ (isometrici alla sfera) sono limitati.

3.3 I modelli di Friedman-Robertson-Walker.

Il più generale modello FRW si fonda su tre assunti:

Assioma 1 *L'universo è idealizzabile con un gas di particelle le cui linee di universo formano una congruenza.*

Ciò equivale a individuare in \mathcal{V}_4 una congruenza Γ privilegiata di curve di tipo tempo, tale che il moto (**moto naturale**) di ogni galassia sia descritto da una curva $\gamma \in \Gamma$. In particolare, per ogni $x \in \mathcal{V}_4$ passa un'unica curva di Γ , e non possono dunque esservi nè sorgenti nè buche di fluido.

Assioma 2 *L'universo è omogeneo.*

In altre parole, ogni osservatore in moto naturale lungo una qualsiasi $\gamma \in \Gamma$ vede allo stesso modo l'intero universo, e nel suo riferimento le galassie sono distribuite in modo omogeneo e uniforme.

Assioma 3 *L'universo è isotropo.*

Non esistono pertanto direzioni privilegiate nel giudizio di alcun osservatore in moto naturale, nè la distribuzione delle galassie mostra alcun gradiente in qualche direzione, nè l'orientamento dei relativi assi di simmetria evidenzia alcun allineamento.

Gli assiomi 1, 2, 3 sono sufficienti a restringere l'insieme delle metriche ammissibili per \mathcal{V}_4 ad una classe ben definita e con caratteristiche comuni.

In virtù di 1 si può definire il campo $V \in \mathcal{D}^1(\mathcal{V}_4)$ dei versori di tipo tempo tangenti alle curve $\gamma \in \Gamma$. Da 3 segue che V non può avere accelerazione, in quanto quest'ultima individuerebbe una direzione privilegiata nel giudizio di un osservatore in moto solidale col fluido. Pertanto, *i moti naturali formano una congruenza di geodetiche*. Ancora da 3 segue che un osservatore in moto lungo una generica $\gamma \in \Gamma$ non nota alcuna rotazione o deformazione nella distribuzione delle galassie che lo circondano; in caso contrario, infatti, l'asse di rotazione o gli assi di deformazione individuerebbero un orientamento. Perciò i tensori ω e σ (definiti in §2.2) si annullano in ogni punto di \mathcal{V}_4 . Dall'annullarsi di ω segue direttamente (cfr. §2.2) che per ogni $x_0 \in \mathcal{V}_4$ esiste un intorno aperto U_{x_0} e una funzione $t \in \mathcal{F}(U_{x_0})$, definita a meno di una costante additiva, tale che $V = -g^{-1}(dt)$. Scelta la funzione t (indicata sovente col nome di **tempo cosmico**), per ogni $x \in U_{x_0}$ passa un'unica superficie $\pi_{t(x)}$ (di tipo spazio), di equazione $t = t(x) = \text{costante}$, ortogonale a V .

Fissato $t(x_0) = 0$, siano $\{x^1, x^2, x^3\}$ coordinate per la superficie π_0 . Detto $\varphi_\xi : U'_{x_0} \rightarrow \mathcal{V}_4$, con $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $U'_{x_0} \subset U_{x_0}$, il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato dal campo V , se ne consideri la restrizione $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \pi_0 \rightarrow \mathcal{V}_4$ alla superficie π_0 , descritta in coordinate da $\varphi_\xi(x) = \varphi(\xi, x^1, x^2, x^3)$, con $x \in \pi_0$. Dal fatto che $\varphi_0 = \text{id}_{\pi_0}$ segue che i vettori $\frac{d\varphi}{dx^i}(0, x_0)$ generano lo spazio tangente $T_{x_0}(\pi_0)$, mentre $\frac{d\varphi}{d\xi}(0, x_0) = V_{x_0} \notin T_{x_0}(\pi_0)$. Quindi $\{x^1, x^2, x^3, x^4 = \xi\}$ definiscono mediante φ un sistema di coordinate locali in un intorno aperto $U''_{x_0} \subset U'_{x_0}$ di x_0 . Ogni curva $\varphi(\xi, x)$, con $x \in \pi_0$ fissato, è una linea uscente da x avente $V = \frac{\partial}{\partial \xi}$ per vettore tangente, cioè è una geodetica $\gamma_x \in \Gamma$ parametrizzata da ξ in modo affine. Essendo il campo V un versore di tipo tempo, la rappresentazione della metrica nelle coordinate $\{x^1, x^2, x^3, \xi\}$ assume una forma del tipo:

$$g = -d\xi \otimes d\xi + g_{4i}d\xi \otimes dx^i + g_{i4}dx^i \otimes d\xi + g_{ij}dx^i \otimes dx^j.$$

D'altronde, per costruzione V è anche ortogonale alla superficie π_0 a $\xi = 0$, la qual cosa comporta:

$$g_{4i}(x^1, x^2, x^3, 0) = 0.$$

L'equazione delle geodetiche, con τ parametro affine, è:

$$\frac{d^2 x^\mu_\gamma}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha_\gamma}{d\tau} \frac{dx^\beta_\gamma}{d\tau} = 0,$$

che per γ_x , ricordando che $g_{44} = -1$, si riscrive:

$$\Gamma_{44}^\mu = 0 \quad \mu = 1 \dots 4,$$

cioè:

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \{44; \nu\} = 0 \quad \mu = 1 \dots 4 \iff \{44; \nu\} = 2\frac{\partial g_{4\nu}}{\partial x^4} = 0 \quad \nu = 1 \dots 4.$$

Dunque $g_{4i} = 0$ in tutto U''_{x_0} . Da ciò segue anche che $d\xi = -g(V) = dt$, cioè $x^4 = \xi = t$ (a meno di ininfluenti costanti additive).

In tutta generalità, *un sistema di coordinate* $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ *ricavabile come sopra a partire da un campo* V *di vettori di tipo tempo o di tipo spazio tale che* $V_{\mu\|\nu} - V_{\nu\|\mu} = 0$ *e che* $(V, V) = \mp 1 = \text{costante}$ *(o, in modo equivalente, tale che* $V_{\mu\|\nu} - V_{\nu\|\mu} = 0$ *e che* $\nabla_V V = 0$) *prende il nome di sistema di coordinate gaussiane*⁴; in tale sistema di coordinate la metrica si scrive:

$$g = g_{44}dx^4 \otimes dx^4 + g_{ij}^{\mp}(x^1 \dots x^4) dx^i \otimes dx^j,$$

con: $g_{44} = (V, V)$ e g_{ij}^{\mp} è una metrica tridimensionale iperbolica o definita positiva a seconda che sia $g_{44} = 1$ o $g_{44} = -1$. Nel caso presente:

$$g = -dt^2 + g_{ij}(x^1 \dots x^4) dx^i \otimes dx^j,$$

con g_{ij} definita positiva.

Dalla richiesta che il modello sia omogeneo segue che gli osservatori in moto naturale misurano lo stesso valore del parametro di espansione della congruenza Γ indipendentemente dal punto in cui si trovano su una generica superficie a $t = \text{costante}$; in altre parole, θ è funzione del solo tempo cosmico: $\theta = \theta(t)$. Si è già visto che il requisito di isotropia impone che sia $\sigma = \omega = 0$; si ha pertanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{\mu\nu} = 2V_{\mu\|\nu} - \frac{1}{3}\theta(g_{\mu\nu} + V_{\mu}V_{\nu}) \implies \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Gamma_{ji}{}^4 = V_{i\|j} = \frac{1}{6}\theta g_{ij} \\ &\implies \frac{\partial}{\partial t} \ln g_{ij}(x^1, x^2, x^3, t) = \frac{1}{6}\theta(t) \\ &\implies g_{ij}(x^1, x^2, x^3, t) = G^2(t) g_{ij}(x^1, x^2, x^3, 0), \end{aligned}$$

⁴Un sistema di coordinate gaussiano può pure essere costruito a partire da una qualunque superficie S di tipo non nullo in \mathcal{V}_4 . Siano infatti $\{y^1 \dots y^4\}$, $\{x^1, x^2, x^3\}$ coordinate generiche rispettivamente in \mathcal{V}_4 e in S ; indicando con N_x il versore ortogonale a S in ciascun punto $x = x(x^1, x^2, x^3) \in S$, la soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{y}^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu \frac{d\bar{y}^\alpha}{d\tau} \frac{d\bar{y}^\beta}{d\tau} &= 0 \\ \bar{y}^\alpha(0) &= y^\alpha(x(x^1, x^2, x^3)) \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau}(0) &= N_{x(x^1, x^2, x^3)} \end{aligned}$$

individua (localmente) un sistema di coordinate $\{x^1, x^2, x^3, x^4 = \tau\}$ in \mathcal{V}_4 legato alle $\{y^1 \dots y^4\}$ dalla trasformazione: $y^\alpha = \bar{y}^\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$; tale trasformazione è localmente invertibile in virtù del fatto che $\det \frac{\partial(y^1 \dots y^4)}{\partial(x^1 \dots x^4)} \Big|_{x^1, x^2, x^3, 0} \neq 0$; inoltre nelle nuove coordinate $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ si ha:

$$\tilde{\Gamma}_{44}{}^\mu = 0 \implies \frac{\partial \tilde{g}_{4\mu}}{\partial x^4} = 0 \implies \tilde{g}_{4\mu}(x^1, x^2, x^3, x^4) = \tilde{g}_{4\mu}(x^1, x^2, x^3, 0) = 0.$$

con $G \neq 0$ funzione arbitraria. Perciò: $g_{ij}(x^1, x^2, x^3, t) = G^2(t) \bar{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3)$, con \bar{g}_{ij} funzione solamente delle coordinate $\{x^1, x^2, x^3\}$ per le superfici a $t = \text{costante}$.

Le equazioni di Killing per la metrica:

$$g = -dt^2 + G^2(t) g_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i \otimes dx^j$$

sono:

$$-2 \frac{\partial \xi^4}{\partial t} = 0, \quad (3.11)$$

$$-\frac{\partial \xi^4}{\partial x^i} + G^2 \bar{g}_{ij} \frac{\partial \xi^j}{\partial t} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} \xi^k + \bar{g}_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + \bar{g}_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = -2 \frac{\dot{G}}{G} \bar{g}_{ij} \xi^4. \quad (3.13)$$

L'assunto 2 impone che ciascuna superficie π_t sia una sottovarietà omogenea rispetto all'azione (effettiva) di un gruppo di isometrie G su \mathcal{V}_4 . L'assioma 3 richiede invece che il sottogruppo di isotropia $H_x \subset G$ di ciascun punto $x \in \pi_t$ abbia $\dim H_x = 3$. Deve pertanto essere: $\dim G = 6$. Dal fatto che le π_t sono sottovarietà omogenee rispetto all'azione di G segue che $\xi^4 = 0 = \text{costante}$; ciò soddisfa la 3.11, mentre dalla 3.12 si ricava: $\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3)$; il requisito che infine la 3.13 ammetta $6 = \frac{\dim \pi_t (\dim \pi_t + 1)}{2}$ soluzioni indipendenti equivale a domandare che \bar{g}_{ij} sia una *metrica a curvatura costante*, come si è visto nel commento alle equazioni di Killing in §1.4. Scegliendo opportunamente le $\{x^1, x^2, x^3\}$ può dunque sempre aversi:

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 + \frac{K}{4} r^2)^2} \quad \text{con } K = \text{costante} \in \{1, 0, -1\}, \quad r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

La metrica completa di \mathcal{V}_4 è quindi:

$$g = -dt \otimes dt + \frac{G^2(t)}{(1 + \frac{K}{4} r^2)^2} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j. \quad (3.14)$$

Si vede in particolare che, fissato K , tutte le superfici a $t = \text{costante}$ sono superfici a curvatura costante con lo stesso segno della curvatura, e sono dunque isometriche fra loro. Per $K = 1$ le superfici π_t sono isometriche a sfere $S_{G(t)}^3$ e sono dunque compatte; per $K = 0$ e per $K = -1$ le π_t sono isometriche rispettivamente all'ordinario trispazio euclideo e all'iperboloide $H_{G(t)}^3$, che non sono limitati e hanno la topologia di \mathbb{R}^3 . Nel seguito si userà talvolta in luogo della 3.14 la corrispondente scrittura ottenuta riferendo le superfici a $t = \text{costante}$ a coordinate polari $(r, \theta, \varphi) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, vale a dire⁵:

$$g = -dt^2 + dr^2 + f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.15)$$

⁵Per passare dalla 3.14 alla 3.15 basta infatti sostituire:

$$x^1 = \rho(r) \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = \rho(r) \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = \rho(r) \cos \theta,$$

con:

$$f(r) = \begin{cases} \sin r & \text{se } K = 1 \\ r & \text{se } K = 0 \\ \sinh r & \text{se } K = -1 \end{cases} .$$

Dalla metrica 3.14 si possono ricavare i simboli di Christoffel, e da questi il tensore di curvatura e il tensore di Ricci. Posto: $\bar{g}_{ij} = (1 + \frac{K}{4}r^2)^{-2} \delta_{ij}$, si calcola ($x^4 = t$):

$$\Gamma_{4j}{}^i = \delta^i_j \frac{\dot{G}}{G}, \quad \Gamma_{ij}{}^4 = G\dot{G}\bar{g}_{ij}, \quad \Gamma_{jk}{}^i = \frac{\bar{g}^{ip}}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}_{pj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{g}_{pi}}{\partial x^j} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^p} \right), \quad (3.16)$$

$$R_{4i4j} = -G\ddot{G}\bar{g}_{ij}, \quad R_{ijkl} = G^2 \left(\dot{G}^2 + K \right) (\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl} - \bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}), \quad (3.17)$$

$$R_{44} = -3\frac{\ddot{G}}{G}, \quad R_{ij} = \left(G\ddot{G} + 2\dot{G}^2 + 2K \right) \bar{g}_{ij}, \quad (3.18)$$

essendo nulle le quantità non esplicitamente indicate.

3.4 Simmetrie dei modelli FRW.

Nel seguito si indicherà col simbolo “ ; ” la derivazione covariante rispetto alla metrica \bar{g}_{ij} , si porrà: $c_{ijkl} = \bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl} - \bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}$ e gli indici saranno alzati e abbassati con la metrica $g_{\mu\nu}$. le equazioni di Killing 1.8 per la metrica 3.14 si riscrivono dunque:

$$\frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \xi^4}{\partial x^i} - g_{ip} \frac{\partial \xi^p}{\partial x^4} = 0, \quad (3.20)$$

$$\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = -2G\dot{G}\bar{g}_{ij}\xi^4. \quad (3.21)$$

Le relative condizioni di integrabilità 1.10 non identicamente verificate sono:

$$0 = \xi^4 \bar{g}_{jl} \left(\dot{G}\ddot{G} + G\ddot{\dot{G}} \right) + 2G\ddot{G}\bar{g}_{jl} \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} + G\ddot{G} \left(\bar{g}_{hl}\xi^h{}_{;j} + \bar{g}_{hj}\xi^h{}_{;l} \right), \quad (3.22)$$

$$0 = G^2 \left(\dot{G}^2 + K \right) c_{hijkl} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^4} - G\ddot{G} \left(\bar{g}_{lj} \frac{\partial \xi^4}{\partial x^k} - \bar{g}_{kj} \frac{\partial \xi^4}{\partial x^l} \right), \quad (3.23)$$

$$0 = \xi^4 c_{ijkl} \frac{d}{dt} \left[G^2 \left(\dot{G}^2 + K \right) \right] + G^2 \left(\dot{G}^2 + K \right) \cdot \left(c_{hijkl} \xi^h{}_{;i} + c_{ihkl} \xi^h{}_{;j} + c_{ijhl} \xi^h{}_{;k} + c_{ijkh} \xi^h{}_{;l} \right). \quad (3.24)$$

con:

$$\rho(r) = \begin{cases} 2 \tan \frac{r}{2} & \text{se } K = 1 \\ r & \text{se } K = 0 \\ 2 \tanh \frac{r}{2} & \text{se } K = -1 \end{cases} .$$

Sostituendo la 3.20 nella 3.23 e contraendo con \bar{g}^{jl} si ottiene:

$$\left(\dot{G}^2 + K - G\ddot{G}\right) \frac{\partial \xi^4}{\partial x^k} = 0. \quad (3.25)$$

Contraendo la 3.22 con \bar{g}^{jl} e sostituendovi le 3.19, 3.21 si ha:

$$\xi^4 \left(G\ddot{G} - \dot{G}\dot{G}\right) = 0. \quad (3.26)$$

Contraendo la 3.24 con $\bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}$ e usando la 3.21 si ricava:

$$2G\dot{G}\xi^4 \left(\dot{G}^2 + K - G\ddot{G}\right) = 0. \quad (3.27)$$

Per costruzione, nel modello FRW agisce un gruppo a sei parametri di isometrie per il quale le superfici con curvatura costante a $t = \text{costante}$ sono invarianti, e dunque esistono a priori sei campi di Killing linearmente indipendenti aventi nulla la componente temporale. Questo può essere verificato ponendo:

$$\xi^4 = 0 \quad (3.28)$$

nelle 3.19, 3.20, 3.21. Con tale sostituzione si ottengono le equazioni:

$$\bar{g}_{ih}\xi^h{}_{;j} + \bar{g}_{jh}\xi^h{}_{;i} = 0 \quad (3.29)$$

in $\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3)$, e le condizioni di integrabilità 3.22, 3.23, 3.24 sono identicamente soddisfatte in virtù di 3.28, 3.29. Ciò è consistente con quanto detto poco sopra.

Tuttavia, si può richiedere che il modello abbia un numero di simmetrie maggiore di quello imposto dagli assiomi 2 e 3, che è il grado massimo di simmetria sulle superfici a $t = \text{costante}$. In altre parole, è possibile analizzare le condizioni sulla metrica 3.14 risultanti dal requisito che esistano campi di Killing ξ aggiuntivi ai sei precedenti, cioè tali che $\xi^4 \neq 0$. In questo caso, è necessario che siano soddisfatte le 3.25, 3.26, 3.27, cioè deve essere:

$$\left(\dot{G}^2 + K - G\ddot{G}\right) \frac{\partial \xi^4}{\partial x^k} = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{G}}{G}\right) = 0, \quad (3.31)$$

$$\dot{G} \left(\dot{G}^2 + K - G\ddot{G}\right) = 0. \quad (3.32)$$

Dalla 3.31 si ricava: $\ddot{G} = CG$, con $C = \text{costante}$, mentre dalla 3.32 può essere: $\dot{G}^2 + K - G\ddot{G} = 0$ oppure $\dot{G} = 0$. Il primo dei due casi soddisfa automaticamente la 3.30, e si vede dall'espressione 3.17 del tensore di curvatura che $\dot{G}^2 + K - CG^2 = 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinché l'intero

\mathcal{V}_4 sia uno spazio a curvatura costante e pari a C ; si hanno poi ancora i tre sottocasi: $K = \pm 1, 0$ per le superfici spaziali a $t = \text{costante}$; poichè deve però essere $CG^2 - K = \dot{G}^2 \geq 0$, sono esclusi i casi $C \leq 0$ con $K = 1$; il requisito che G non sia nullo esclude pure che sia $C < 0$ con $K = 0$. Nel caso in cui $\dot{G} = 0$, invece, la 3.31 è soddisfatta, mentre se in più è $K \neq 0$ dalle 3.30, 3.19 si ricava: $\xi^4 = \text{costante}$; sostituendo questo risultato nelle equazioni di Killing 3.20, 3.21 si ottiene che le componenti spaziali sono: $\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3)$ e soddisfano: $\bar{g}_{ih}\xi^h{}_{;j} + \bar{g}_{jh}\xi^h{}_{;i} = 0$; si hanno perciò in tutto sette campi di Killing indipendenti, sei corrispondenti alle simmetrie spaziali e uno generato dall'invarianza per traslazioni temporali; i modelli si classificano poi ancora secondo i casi $K = 1$ o $K = -1$. Se infine $\dot{G} = 0$ e $K = 0$, le 3.30, 3.31, 3.32 sono identicamente verificate e così pure le condizioni di integrabilità 3.22, 3.23, 3.24 in conseguenza delle equazioni di Killing; si ha un \mathcal{V}_4 a curvatura costante e pari a zero, le cui sezioni a $t = \text{costante}$ sono piatte anch'esse.

Riassumendo, si hanno i seguenti otto modelli cosmologici diversi con più di sei simmetrie:

1. \mathcal{V}_4 è a curvatura costante e pari a C :

- (a) $C < 0, \quad K = -1$;
- (b) $C = 0, \quad K = -1$;
- (c) $C = 0, \quad K = 0$;
- (d) $C > 0, \quad K = -1$;
- (e) $C > 0, \quad K = 0$;
- (f) $C > 0, \quad K = 1$.

2. G è funzione costante del tempo, \mathcal{V}_4 non è a curvatura costante:

- (a) $K = -1$;
- (b) $K = 1$.

Agli assunti 2, 3, che definiscono il modello FRW in base alla richiesta che osservatori diversi sulla stessa superficie a $t = \text{costante}$ vedano allo stesso modo l'universo intorno a sè, si può aggiungere l'ulteriore e indipendente requisito che l'universo sia **stazionario**, o in altre parole:

Assioma 4 *Osservatori in moto naturale lungo geodetiche di Γ eventualmente coincidenti vedono l'universo evolvere allo stesso modo a partire da tempi cosmologici differenti.*

L'ulteriore richiesta che \mathcal{V}_4 sia stazionario impone dunque l'esistenza di un campo ξ di vettori di connessione per Γ tale che $\xi^4 \neq 0$ e che ξ generi

(localmente) un gruppo a un parametro di isometrie; evidentemente i modelli FRW stazionari saranno un sottoinsieme degli otto modelli 1, 2 trovati in precedenza. Il requisito $[\frac{\partial}{\partial t}, \xi] = 0$ impone che sia: $\xi^\mu = \xi^\mu(x^1, x^2, x^3)$. Per generare un gruppo di isometrie, le ξ^μ devono poi essere soluzioni delle equazioni di Killing; la 3.19 è soddisfatta, mentre dalla 3.20 si ricava: $\xi^4 =$ costante; riscritta la 3.21 nella forma: $\bar{g}_{ik}\xi^k{}_{;j} + \bar{g}_{jk}\xi^k{}_{;i} = -2\frac{\dot{G}}{G}\bar{g}_{ij}\xi^4$, si nota che il membro di sinistra non è funzione del tempo, e tale deve quindi essere pure il membro di destra, cioè: $\frac{\dot{G}}{G} =$ costante. Se $\xi^4 =$ costante $\neq 0$ e $\frac{\dot{G}}{G} =$ costante, le condizioni di integrabilità 3.22, 3.23 sono soddisfatte, mentre dal corollario 3.27 della 3.24 segue che deve essere $K\dot{G} = 0$, e viceversa se è in più $K\dot{G} = 0$ pure la 3.24 è verificata. In sintesi, dunque, il *campo di Killing* ξ richiesto dall'assunto 4 esiste se e solo se:

$$\begin{cases} K\dot{G} = 0 \\ \frac{\dot{G}}{G} = \text{costante} \end{cases} \quad (3.33)$$

Il sistema 3.33 ha le seguenti quattro soluzioni:

- i. $K = -1$, $G =$ costante;
- ii. $K = 0$, $G =$ costante;
- iii. $K = 1$, $G =$ costante;
- iv. $K = 0$, $\frac{\dot{G}}{G} =$ costante $\neq 0$.

ii è la **metrica di Minkowski**; i, iii sono le **metriche di Einstein**, rispettivamente con curvatura spaziale negativa e positiva; iv è la **metrica di deSitter**.

Si hanno le seguenti corrispondenze fra i quattro modelli stazionari e gli otto modelli con più di sei simmetrie ottenuti in precedenza:

$$\text{i} = 2a, \quad \text{ii} = 1c, \quad \text{iii} = 2b, \quad \text{iv} = 1e.$$

Gli otto modelli FRW con più di sei simmetrie sono riassunti nella tabella 3.1.

3.5 Breve rassegna dei principali modelli FRW.

Si è visto nei due precedenti paragrafi che la più generale metrica FRW è caratterizzata dalla curvatura spaziale K e dalla funzione $G(t)$; tuttavia, modelli con K e G diversi possono essere fra essi isometrici (ovvero possono –localmente– corrispondere alla stessa metrica di \mathcal{V}_4 , espressa in coordinate diverse); infatti, la differenza fra gli uni e gli altri può consistere anche solo nella scelta della congruenza di geodetiche che descrive i moti naturali.

Curvatura spaziale K	Curvatura C di \mathcal{V}_4	Il modello è stazionario?	$G(t)$ è costante?
-1	< 0	no	no
-1	$= 0$	no	no
0	$= 0$	sì	sì
-1	> 0	no	no
0	> 0	sì	no
1	> 0	no	no
-1	non costante	sì	sì
1	non costante	sì	sì

Tabella 3.1: Modelli FRW con pi di sei simmetrie.

Una caratteristica rilevante in un modello cosmologico è il fatto che esso sia o meno **geodeticamente completo**, ovvero che, per ogni $x \in \mathcal{V}_4$, il map-esponenziale \exp_x sia definito sull'intero spazio tangente $T_x(\mathcal{V}_4)$. Si vedrà che questo requisito non è soddisfatto da alcuni fra i modelli descritti nel paragrafo precedente.

In \mathbb{R}^5 riferito a coordinate pseudocartesiane $\{z^0 \dots z^4\}$, con metrica:

$$h_+ = - (dz^0)^2 + (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 + (dz^4)^2,$$

si consideri il cilindro:

$$\mathcal{C} : (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 + (z^4)^2 = 1.$$

La metrica indotta da (\mathbb{R}^5, h_+) su \mathcal{C} è la metrica stazionaria di Einstein con $K = 1$ (di tipo 2b secondo la classificazione di pag. 39); basta infatti definire sul cilindro le coordinate $\{x^1, x^2, x^3, t\}$, con:

$$z^0 = t, \quad z^i = \frac{x^i}{1 + \frac{r^2}{4}}, \quad z^4 = \frac{1 - \frac{r^2}{4}}{1 + \frac{r^2}{4}},$$

nelle quali la metrica su \mathcal{C} è:

$$g_E = -dt^2 + \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2}.$$

Un ragionamento analogo mostra che (\mathbb{R}^5, h_-) , con:

$$h_- = - (dz^0)^2 + (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 - (dz^4)^2, \quad (3.34)$$

induce sull'iperboloide:

$$(z^4)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 = 1$$

la metrica di Einstein con $K = -1$.

Esaminando più dettagliatamente i sei modelli FRW nei quali \mathcal{V}_4 ha curvatura costante e pari a C (sottocasi del caso 1 secondo la nomenclatura di pag. 39), si osserva che in realtà essi corrispondono solamente a tre metriche inequivalenti di \mathcal{V}_4 , poichè si è visto in §3.1 che varietà con curvatura costante e dello stesso segno sono isometriche. La differenza fra i modelli con segno di C concorde (o con $C = 0$) consiste dunque nella scelta della congruenza di geodetiche che definisce il moto naturale dei punti del fluido in \mathcal{V}_4 .

Per esempio, il **modello di Minkowski con espansione** (tipo 1b), riferito a coordinate polari $\{\rho, \theta, \varphi, \tau\}$, si ottiene dalla metrica ordinaria del modello di Minkowski (tipo 1c), in coordinate polari $\{r, \theta, \varphi, t\}$, mediante la trasformazione:

$$r = \tau \sinh \rho, \quad t = \tau \cosh \rho;$$

nei due sistemi di coordinate la metrica è:

$$\begin{aligned} g_M &= -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ &= -d\tau^2 + \tau^2 [d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \end{aligned}$$

Poichè nell'uno e nell'altro modello la congruenza dei moti naturali è data rispettivamente dalle curve tangenti a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ e a $\frac{\partial}{\partial t}$, si vede che, mentre nel modello con $C = K = 0$ le linee di universo dei punti nel fluido sono rette parallele, nel \mathcal{V}_4 piatto con $K = -1$ tali moti formano un fascio di rette comprese nel cono di luce uscente dall'origine; ciò mostra in particolare che la metrica 1b non è geodeticamente completa (se x è un punto su una retta del fascio compreso nel cono di luce uscente dall'origine, qualunque semiretta di tipo tempo uscente da x , orientata verso il passato e non passante per l'origine non è interamente contenuta nel cono di luce stesso).

In modo analogo si vede che pure nei modelli 1d, 1e, 1f (con $C > 0$) la differenza consiste nella scelta della congruenza dei moti naturali (e dunque del fogliettamento di \mathcal{V}_4 con le superfici a $t = \text{costante}$), essendo i tre modelli isometrici a porzioni dell'iperboloide:

$$\mathcal{H}: -(z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 + (z^4)^2 = 1$$

immerso in (\mathbb{R}^5, h_+) (fig. 3.1). Il modello (**di Lanczos**) con $C = K = 1$, nel quale è: $\ddot{G} = G, \dot{G}^2 - G^2 + 1 = 0$, si ottiene riferendo \mathcal{H} a coordinate $\{r, \theta, \varphi, t\}$ secondo le relazioni:

$$\begin{aligned} z^0 &= \sinh t, \quad z^1 = \cosh t \cos r, \quad z^2 = \cosh t \sin r \cos \theta, \\ z^3 &= \cosh t \sin r \sin \theta \cos \varphi, \quad z^4 = \cosh t \sin r \sin \theta \sin \varphi; \end{aligned}$$

infatti la metrica indotta sulla superficie è:

$$g_L = -dt^2 + \cosh^2 t [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]; \quad (3.35)$$

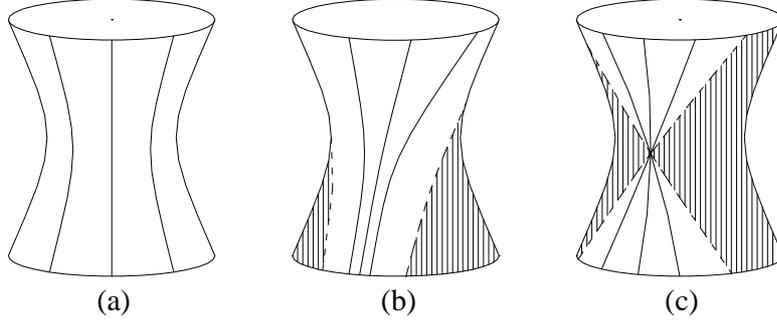


Figura 3.1: Iperboloidi in tre dimensioni ottenuti da sezioni di \mathcal{H} con una superficie a $z^3 = \text{costante}$, $z^4 = \text{costante}$. I tre modelli FRW con curvatura di \mathcal{V}_4 costante e positiva coprono le porzioni di \mathcal{H} non tratteggiate e, usando la classificazione di pag. 39, si hanno le corrispondenze:

- (a) modello di Lanczos (tipo 1f);
- (b) modello di deSitter (tipo 1e);
- (c) modello di tipo 1d.

In ciascun modello, le righe continue raffigurano le linee di universo di tre punti distinti in moto naturale.

si vede inoltre che tali coordinate ricoprono l'intero iperboloide (le singolarità a $r = 0$, $r = \pi$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$ sono del tutto simili alle analoghe singolarità che si hanno riferendo \mathbb{R}^3 a coordinate polari). Passando alle nuove coordinate $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{t}\}$ definite su \mathcal{H} da:

$$\tilde{t} = a \ln \frac{z^0 + z^4}{a}, \quad \tilde{x}^i = \frac{az^i}{z^0 + z^4} \quad \text{con: } a = \pm 1, \quad (3.36)$$

la metrica si riscrive:

$$g_S = -d\tilde{t}^2 + e^{2\frac{\tilde{t}}{a}} \left[(d\tilde{x}^1)^2 + (d\tilde{x}^2)^2 + (d\tilde{x}^3)^2 \right]. \quad (3.37)$$

Si vede immediatamente che tale espressione corrisponde al modello stazionario di deSitter (tipo 1e, con $C = 1$, $K = 0$ e $\frac{\dot{G}}{G} = \text{costante}$). Il sistema di coordinate dato in 3.36 (e dunque il modello di deSitter) non ricopre l'intero iperboloide, ma solo la regione con $z^0 + z^4 > 0$ o con $z^0 + z^4 < 0$, a seconda che sia $a = 1$ o $a = -1$; il parametro di espansione $\theta(t) = 3\frac{\dot{G}}{G} = \frac{6}{a}$ è una costante positiva o negativa nei due casi, mostrando così che se $a = 1$ si ottiene un universo (stazionario) in espansione, oppure se $a = -1$ si ottiene un modello (stazionario) che si contrae; in entrambi i casi non si hanno singolarità al finito. Infine, il modello con $C = 1$, $K = -1$, nel quale è: $G(\hat{t}) = \sinh \hat{t}$, è analogo al modello di Minkowski in espansione, in quanto corrisponde al

caso in cui i moti naturali tracciano su \mathcal{H} una congruenza di geodetiche uscenti dal punto (singolare per tale metrica) a $\hat{t} = 0$. Quest'ultimo modello e il modello di deSitter non sono geodeticamente completi, poichè coprono soltanto una parte di \mathcal{H} .

È interessante osservare che la metrica indotta da (\mathbb{R}^5, h_+) su \mathcal{H} è tale che ogni punto P *in moto geodetico* (non necessariamente naturale) sull'iperboloide ha un **orizzonte degli eventi** sia nel passato che nel futuro⁶, ovvero esistono regioni di $\mathcal{H} \cong \mathcal{V}_4$ che P non potrà mai osservare e altre porzioni che non possono essere influenzate da P . Ciò è dovuto al fatto che dalla metrica 3.35 segue che le superfici a $t = -\infty$ e a $t = +\infty$ sono di tipo spazio, come può vedersi definendo la nuova coordinata:

$$t' = 2 \arctan e^t - \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

con la quale la 3.35 diventa:

$$g_L = \frac{1}{\cos^2 t'} \left[- (dt')^2 + dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right],$$

che è una metrica conforme alla metrica di una porzione del modello di Einstein con $K = 1^7$:

$$g_E = - (dt')^2 + dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Le superfici a $t = \pm\infty$ corrispondono alle superfici di tipo spazio a $t' = \pm\frac{\pi}{2}$ sul cilindro \mathcal{C} ; la regione di \mathcal{V}_4 oltre l'orizzonte degli eventi di P è mostrata in fig. 3.2. Nel caso della metrica di deSitter 3.37, con $a = 1$, la sostituzione:

$$t'' = -e^{-\tilde{t}} \in (0, +\infty)$$

conduce a:

$$g_S = \frac{1}{(t'')^2} \left[- (dt'')^2 + (d\tilde{x}^1)^2 + (d\tilde{x}^2)^2 + (d\tilde{x}^3)^2 \right],$$

che è conforme alla metrica di Minkowski in coordinate pseudoeuclidee nella regione $t'' < 0$. Questo mostra che la congruenza di geodetiche Γ formata dai moti naturali del modello di deSitter ha un orizzonte degli eventi nel futuro (esistono regioni di Γ dai quali un osservatore in moto lungo una fissata $\gamma \in \Gamma$ non può mai essere influenzato), ma non nel passato.

Il solo modello FRW con più di sei simmetrie corrispondente a un \mathcal{V}_4 con curvatura C costante e negativa (d'ora in poi: $C = -1$) è il **modello anti-deSitter**, con $K = -1$ (tipo 1a); la sua metrica è:

$$g_{AS} = -dt^2 + \cos^2 t \left[dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (3.38)$$

⁶Questa situazione non si verifica, per esempio, nel \mathcal{V}_4 piatto.

⁷In particolare, metriche conformi (cioè proporzionali secondo un fattore funzione del punto) hanno gli stessi coni di luce in ogni punto di \mathcal{V}_4 .

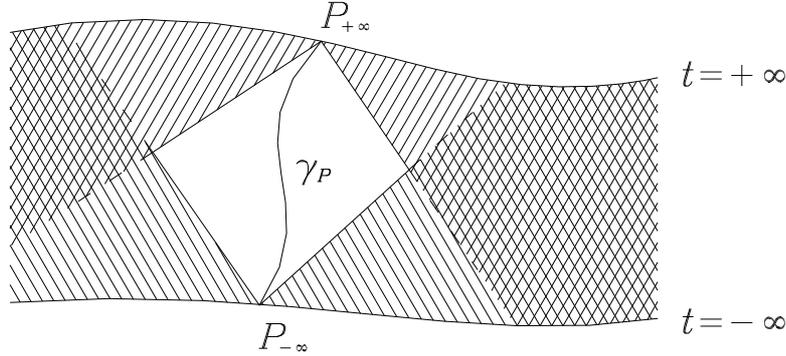


Figura 3.2: La geodetica γ_P lungo la quale si compie il moto di P esce dalla superficie a $t = -\infty$ e termina sulla superficie a $t = +\infty$; entrambe le superfici sono di tipo spazio. La regione osservabile da P è compresa entro il cono di luce uscente da $P_{+\infty}$ e orientato verso il passato, quella influenzabile da P si trova nel cono di luce con origine in $P_{-\infty}$ e orientato verso il futuro.

con $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tale metrica copre solo una porzione dell'iperboloide:

$$\mathcal{I}: (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 = 1 + (z^0)^2 + (z^4)^2$$

immerso in (\mathbb{R}^5, h_-) , con h_- data da 3.34. g_{AS} non è geodeticamente completa e ha una singolarità apparente a $t = \pm\frac{\pi}{2}$, corrispondente al fatto che tutte le geodetiche ortogonali alle superfici a $t = \text{costante}$ (ovvero le linee di universo dei moti naturali) convergono in due punti distinti di \mathcal{I} per $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e per $t \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. \mathcal{I} ha la topologia di $\mathbb{R}^3 \times S^1$ e dunque non è semplicemente connesso⁸. Introducendo su \mathcal{I} le nuove coordinate polari $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{t}) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ definite da:

$$\begin{aligned} z^0 &= \cosh \bar{r} \cos \bar{t}, & z^1 &= \sinh \bar{r} \cos \bar{\theta}, & z^2 &= \sinh \bar{r} \sin \bar{\theta} \sin \bar{\varphi}, \\ z^3 &= \sinh \bar{r} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\varphi}, & z^4 &= \cosh \bar{r} \sin \bar{t}, \end{aligned}$$

si ottiene che la metrica indotta da (\mathbb{R}^5, h_-) su \mathcal{I} è:

$$\bar{g}_{AS} = -\cosh^2 \bar{r} d\bar{t}^2 + d\bar{r}^2 + \sinh^2 \bar{r} (d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\varphi}^2) \quad (3.39)$$

(le singolarità in $\bar{r} = 0$, $\bar{\theta} = 0$, $\bar{\theta} = \pi$ sono dovute alla scelta di coordinate polari). Non identificando i punti a $\bar{t} = x \pm 2\pi n$ coi punti con coordinata $\bar{t} = x \in (0, 2\pi)$ si ottiene una varietà \mathcal{I}' semplicemente connessa, con la topologia di \mathbb{R}^4 , che è il ricoprimento universale di \mathcal{I} , e sulla quale la metrica 3.39 è definita globalmente (eccetto le già menzionate singolarità polari); d'ora in

⁸In particolare, le curve a $z^i = \text{costante}$ sono geodetiche chiuse e di tipo tempo.

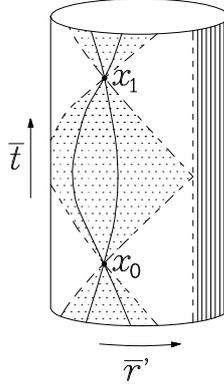


Figura 3.3: Rappresentazione di \mathcal{I}' sul cilindro \mathcal{C} . La regione di \mathcal{C} conforme a \mathcal{I}' è la superficie non tratteggiata. La metrica anti-deSitter copre solo la porzione romboidale (punteggiata in figura) con vertici in x_1 , x_2 e in un punto su ciascuna delle due rette verticali a $\bar{r}' = -\frac{\pi}{2}$, $\bar{r}' = \frac{\pi}{2}$. Queste ultime sono in realtà superfici di tipo tempo in \mathcal{C} , con la topologia di $\mathbb{R} \times S^2$. I punti $\dots x_1, x_2, \dots$, in ciascuno dei quali converge il fascio di geodetiche di tipo tempo uscenti da uno qualsiasi di essi, formano una successione infinita di punti distinti in \mathcal{I}' , mentre si identificano a due a due in \mathcal{I} .

poi si restringerà l'attenzione a \mathcal{I}' . Per studiarne la struttura all'infinito è opportuno definire la nuova coordinata:

$$\bar{r}' = 2 \arctan e^{\bar{r}} - \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

con la quale si ha:

$$\bar{g}_{AS} = \frac{1}{\cos^2 \bar{r}'} \left[-d\bar{t}^2 + (d\bar{r}')^2 + \sin^2 \bar{r}' \left(d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\varphi}^2 \right) \right],$$

che è conforme alla metrica di Einstein g_E nella regione con $-\frac{\pi}{2} < \bar{r}' < \frac{\pi}{2}$ del cilindro \mathcal{C} (cfr. fig. 3.3). In particolare, si osserva che le geodetiche di tipo spazio e di tipo luce di \mathcal{I}' convergono sulle superfici di tipo tempo di \mathcal{C} a $\bar{r}' = -\frac{\pi}{2}$, $\bar{r}' = \frac{\pi}{2}$. Si è visto a proposito della metrica anti-deSitter 3.38, che è una metrica non globale su \mathcal{I}' , che le curve a $(r, \theta, \varphi) = \text{costante}$ sono la congruenza delle geodetiche di tipo tempo uscenti da un punto $x \in \mathcal{I}'$ e convergenti in un punto $y \in \mathcal{I}'$ (con $y \neq x$). Per l'omogeneità di \mathcal{I}' ciò significa che le geodetiche di tipo tempo uscenti da un punto qualunque $x_1 \in \mathcal{I}'$ riconvergono in un secondo punto $x_2 \in \mathcal{I}'$, e così via; in particolare, esistono punti nel futuro di x_1 (ovvero punti che possono essere congiunti a x_1 con curve di tipo tempo) per i quali non passa alcuna geodetica di tipo tempo uscente da x_1 . Un'altra caratteristica di \mathcal{I}' consiste nel fatto che, data una *qualunque* superficie di tipo spazio $\pi \subset \mathcal{I}'$, esistono sempre

geodetiche di tipo luce in \mathcal{I}' che non intersecano π , e che portano dunque informazioni addizionali a quelle ricavabili su π (in altre parole, lo sviluppo di Cauchy di π non copre l'intero \mathcal{I}'); quest'ultima situazione non si verifica nè nel \mathcal{V}_4 piatto di Minkowski, nè in \mathcal{C} , nè in \mathcal{H} .

3.6 Proprietà fisiche dei modelli FRW.

Secondo l'assioma 1 i punti materiali in \mathcal{V}_4 si muovono lungo la congruenza Γ dei moti naturali e dunque il campo delle loro velocità è $V = \frac{\partial}{\partial t}$; le componenti del tensore energia-impulso per il fluido di galassie isotropo: $T_{\mu\nu} = (\mu + p)V_\mu V_\nu + pg_{\mu\nu}$ sono quindi:

$$T_{ij} = pg_{ij} = pG^2(t)\bar{g}_{ij}, \quad T_{i4} = 0, \quad T_{44} = \mu. \quad (3.40)$$

Usando le equazioni del campo: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ con $R_{\mu\nu}$ dato dalle 3.14, si ricava:

$$\mu = 3\frac{\dot{G}^2 + K}{G^2}, \quad (3.41)$$

$$p = -\frac{2G\ddot{G} + \dot{G}^2 + K}{G^2}. \quad (3.42)$$

Dalla legge di conservazione: $T^{4\nu}{}_{;\nu} = 0$ si ottiene:

$$\dot{\mu} + 3\frac{\dot{G}}{G}(\mu + p) = 0, \quad (3.43)$$

mentre $T^{i\nu}{}_{;\nu} = 0$ per $i = 1, 2, 3$ è identicamente soddisfatta dalle 3.40; si vede che la 3.43 può essere pure ricavata dalla 3.41 e dalla 3.42.

Assegnata l'equazione costitutiva $p = p(\mu)$, si può ricavare G dal sistema di equazioni differenziali 3.41, 3.42 a condizione di conoscere i dati iniziali $G(t_0)$, $\dot{G}(t_0)$.

Per un osservatore in moto naturale lungo una $\gamma \in \Gamma$ la distanza di un punto materiale in moto lungo una $\gamma' \in \Gamma$ vicina è dato dalla 2.7 nella base $\left\{e_1 \dots e_4 \mid \frac{De_i}{Dt} = 0, e_4 = \frac{\partial}{\partial t}\right\}$, con $\sigma = \omega = 0$, $\theta = V^\alpha{}_{;\alpha} = 3\frac{\dot{G}}{G}$, $h_{ij} = \delta_{ij}$:

$$\delta X^i = \frac{1}{3}\theta h_{ij}X^j \delta t = \frac{\dot{G}}{G}X_i \delta t.$$

Per tale osservatore le galassie vicine si spostano dunque con velocità proporzionale secondo $H(t) := \frac{\dot{G}(t)}{G(t)}$ alla loro distanza. Il valore presente $H(t_0) = \frac{\dot{G}(t_0)}{G(t_0)}$ è dato perciò dalla **costante (misurata) di Hubble**. Il fatto sperimentale che quest'ultima è non nulla implica che G non è costante e dunque *esclude i due modelli stazionari di Einstein*. Il modello di deSitter è invece un caso limite; sostituendo infatti $K = 0$ e $\dot{G} = \sqrt{C}G$ nelle 3.41, 3.42

si ottiene: $\mu = -p = 3C = \text{costante}$; il modello di deSitter prevede dunque per la velocità del suono: $c_S = \left| \frac{dp}{d\mu} \right|^{\frac{1}{2}}$ un valore pari alla velocità della luce $c = 1$.

I modelli FRW rilevanti sono quelli in cui l'universo è costituito da una polvere di particelle non interagenti ($p = 0$), oppure da sola radiazione ($p = \frac{1}{3}\mu$); nel primo caso, risolvendo la 3.43 si ottiene: $\mu = MG^{-3}$, con $M = \text{costante}$; nel secondo caso, ancora dalla 3.43 si ha: $\mu = \Gamma G^{-4}$, con $\Gamma = \text{costante}$. Sostituendo nella 3.41 tali valori si ottiene rispettivamente:

$$3 \left(\frac{\dot{G}}{G} \right)^2 + \frac{3K}{G^2} = \frac{M}{G^3}, \quad (3.44)$$

$$3 \left(\frac{\dot{G}}{G} \right)^2 + \frac{3K}{G^2} = \frac{\Gamma}{G^4}. \quad (3.45)$$

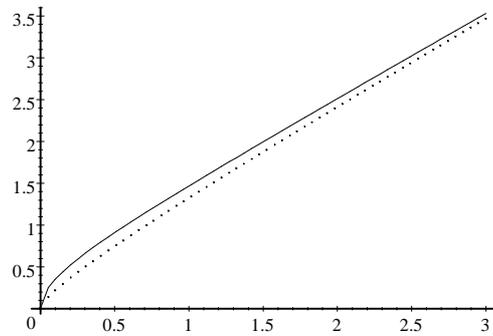
L'andamento delle soluzioni delle equazioni 3.44, 3.45 è delineato nei tre grafici in figura 3.4, nei quali la linea continua si riferisce al caso $p = 0$ e quella tratteggiata al caso $p = \frac{1}{3}\mu$. Si vede che $G(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ in tutti i tre modelli; se $K = 1$, $G(t) \rightarrow 0$ anche ad un istante $T > 0$, altrimenti G ha un andamento monotono crescente. *La singolarità geometrica dei modelli FRW è pure una singolarità fisica*, se $\mu \neq 0$; per convincersene basta osservare che, sostituendo $p = A\mu$ nella 3.43, con $A \in (-1, 1)$ (non può essere $|A| \geq 1$ perchè altrimenti $c_S \geq c$) si ha: $G^{-1}(t) \leq \mu(t) \leq G^{-6}(t)$, cioè $\mu(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \infty$.

Ipotizzando che attualmente sia realistico un modello di universo con $p = 0$, dalla determinazione sperimentale della presente densità di massa: $\mu(t_0) = MG^{-3}(t_0)$, sostituendo quest'ultima e $H(t_0)$ in 3.44 si ricava $G(t_0)$ per ciascuno dei tre casi $K = \pm 1, 0$, e da $G(t_0)$ si ottiene: $M = \mu(t_0) G^3(t_0)$. Si può quindi risolvere la 3.44 e verificare la validità del modello ricavando da $G(t)$ altre quantità osservabili (per esempio: l'accelerazione delle galassie).

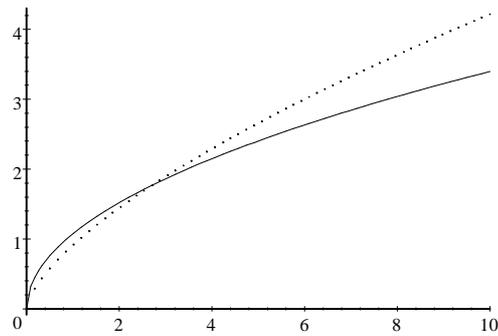
Se si suppone che l'universo sia costituito da una polvere di particelle e da radiazione non interagenti fra loro, la legge di conservazione 3.43 vale indipendentemente sia per l'una che per l'altra, e si ha ancora: $\mu_{part.} = MG^{-3}$, $\mu_{rad.} = \Gamma G^{-4}$. Dalla 3.41 con $\mu = \mu_{part.} + \mu_{rad.}$ si ricava:

$$3 \left(\frac{\dot{G}}{G} \right)^2 + \frac{3K}{G^2} = \frac{M}{G^3} + \frac{\Gamma}{G^4}. \quad (3.46)$$

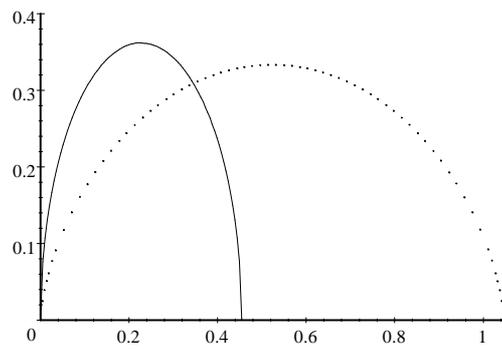
Si possono nuovamente misurare M , Γ , $G(t_0)$, e dalla soluzione della 3.46 si può ricavare per esempio l'andamento teorico della temperatura: $T \propto \frac{\mu}{n}$, con: $n = \frac{\text{fotoni}}{\text{volume}} \propto G^{-3}$, cioè: $T \propto G^{-1}$. Dalla 3.46 si nota inoltre che per tempi prossimi allo zero l'evoluzione dell'universo è dominata dal termine di radiazione proporzionale a G^{-4} .



$$K = -1$$



$$K = 0$$



$$K = 1$$

Figura 3.4: Andamento della funzione $G(t)$ per i tre modelli FRW, calcolata ponendo $M = \Gamma = 1$. La linea tratteggiata si riferisce a una polvere di particelle non interagenti, quella continua a sola radiazione.

Capitolo 4

Modelli omogenei nello spazio e nel tempo.

4.1 Generalità.

Seguendo la definizione di spazio omogeneo data in §1.4, un modello cosmologico si dice **omogeneo nello spazio e nel tempo (ST-omogeneo)** se e solo se esso ammette l'azione transitiva di un gruppo di isometrie. *Nel seguito ci si restringerà esclusivamente al caso in cui tale azione è libera e transitiva*; si limiterà inoltre la ricerca di una soluzione ST-omogenea delle equazioni di Einstein al solo modello di fluido isotropo, mostrando che in tal caso il risultato non è realistico, poichè il termine di espansione θ si annulla.

Se \mathcal{V}_4 ammette l'azione libera e transitiva (e quindi semplicemente transitiva) di un gruppo G_4 , fissato un punto $x_0 \in \mathcal{V}_4$ si possono identificare G_4 e \mathcal{V}_4 per mezzo del diffeomorfismo $\eta_{x_0} : G \rightarrow \mathcal{V}_4$ descritto in §1.4. Le metriche invarianti in G_4 sono tutti e soli i tensori $g = g_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes \omega^\nu$, con $\omega^\mu \in \mathcal{D}_1(\mathcal{V}_4)$ 1-forme left-invarianti duali della base invariante $\{X_1 \dots X_4\}$ e $g_{\mu\nu}$ matrice simmetrica costante con la segnatura di \mathcal{V}_4 . Se il gruppo G_4 è semplicemente connesso, esso è definito a meno di trasformazioni di base dalla conoscenza delle costanti di struttura $c^\mu{}_{\nu\rho}$, soddisfacenti le relazioni:

$$c^\mu{}_{(\nu\rho)} = 0, \quad (4.1)$$

$$c^\alpha{}_{(\rho\sigma} c^\mu{}_{\nu)\alpha} = 0, \quad (4.2)$$

in cui (...) indica simmetrizzazione (normalizzata) rispetto agli indici in parentesi.

Si può dunque ricavare la connessione riemanniana (∇, G_4) associata alla metrica g . I relativi coefficienti di connessione nella base anolonomica $\{X_1 \dots X_4\}$ sono ottenibili dalla relazione:

$$\nabla_{X_\mu} X_\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho X_\rho.$$

La richiesta che ∇ sia una connessione metrica e il fatto che le $g_{\mu\nu}$ sono costanti porgono:

$$\Gamma_{\rho\mu}{}^{\sigma} g_{\sigma\nu} = -\Gamma_{\rho\nu}{}^{\sigma} g_{\sigma\mu}, \quad (4.3)$$

mentre la condizione di torsione nulla impone:

$$c^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho}. \quad (4.4)$$

Da 4.3 e 4.4 segue che:

$$2\Gamma_{\mu\nu\rho} = -c_{\rho\nu\mu} + c_{\mu\rho\nu} + c_{\nu\rho\mu}, \quad (4.5)$$

dove si è posto: $\Gamma_{\mu\nu\rho} = g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}$, $c_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma}c^{\sigma}{}_{\mu\nu}$; si vede in particolare che i coefficienti di connessione sono costanti nella base $\{X_1 \dots X_4\}$, e la 4.5 mostra che essi sono le componenti di un tensore a tre indici. Si possono infine agevolmente calcolare le componenti (costanti) del tensore di Riemann e si trova:

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma_{\sigma\nu}{}^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}{}^{\mu} - \Gamma_{\rho\nu}{}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\alpha}{}^{\mu} - c^{\alpha}{}_{\rho\sigma}\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\mu}. \quad (4.6)$$

Sostituendo la 4.4 in quest'ultima formula, si vede che le identità di Jacobi sono equivalenti all'identità ciclica:

$$0 = R^{\mu}{}_{(\nu\rho\sigma)} = c^{\alpha}{}_{(\rho\sigma} c^{\mu}{}_{\nu)\alpha}.$$

Contraendo il tensore di Riemann col tensore $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{|g|}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$, dove η è il simbolo di permutazione totalmente antisimmetrico con $\eta_{1234} = 1$, si ricava il duale di Hodge:

$$(*R)_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta},$$

e l'identità ciclica è equivalente a:

$$(*R)_{\mu\nu\rho}{}^{\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Dalla 4.6, sostituendovi la 4.4, si può ancora ottenere il tensore di Ricci come segue:

$$R_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(R^{\mu}{}_{\nu\mu\sigma} + R^{\mu}{}_{\sigma\mu\nu}) = \Gamma_{(\sigma\nu)}{}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}{}^{\mu} - \Gamma_{\mu\sigma}{}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\mu},$$

che, posto: $k_{\alpha} = c^{\mu}{}_{\mu\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\mu}$, si riscrive:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{(\mu\nu)}{}^{\alpha}k_{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}{}^{\mu}. \quad (4.8)$$

Dalle equazioni di Einstein per un fluido isotropo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = (\mu + p)V_{\mu}V_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

poichè le $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ sono costanti nella base $\{X_1 \dots X_4\}$, segue facilmente che in tale base pure μ , p , V_{μ} sono costanti; infatti dall'espressione del tensore

simmetrico: $T^{\mu\nu} = \mu V^\mu V^\nu + S^{\mu\nu}$, essendo S un tensore spaziale e poichè $V_\mu V^\mu = -1$, segue che V è l'unico autovettore di tipo tempo di T , e che il suo autovalore è μ ; poichè per la 4.9 le $T^{\mu\nu}$ sono costanti, tali devono essere pure μ e V^μ ; contraendo la 4.9 con $g^{\mu\nu}$ si ricava: $3p = \mu + \text{costante}$, e quindi anche p è costante. L'equazione di continuità per T fornisce dunque:

$$(\mu + p) (V^\mu{}_{\parallel\nu} V^\nu + V^\mu V^\nu{}_{\parallel\nu}) = 0. \quad (4.10)$$

Assumendo che sia $(\mu + p) \neq 0$, separando nella 4.10 i termini ortogonale e parallelo a V si ricava:

$$0 = V^\mu{}_{\parallel\nu} V^\nu = V^\mu V^\rho \Gamma_{(\nu\rho)}^\mu, \quad (4.11)$$

$$0 = V^\nu{}_{\parallel\nu} = k_\nu V^\nu. \quad (4.12)$$

Dalla 4.11 segue che il moto del fluido è geodetico, mentre dalla 4.12 si osserva, come già anticipato, che nei modelli ST-omogenei con $\mu \neq -p$ il termine di espansione θ è nullo.

La 4.11 e la 4.12 pongono ulteriori condizioni sulle costanti di struttura di $G_4 \cong \mathcal{V}_4$, che si aggiungono alle identità di Jacobi espresse dalla 4.7 e alle equazioni di Einstein 4.9. Un metodo di semplificazione e di risoluzione del sistema del sistema (algebrico) costituito dalle equazioni 4.7, 4.9, 4.11, 4.12 nelle incognite $c^\mu{}_{\nu\rho}$, μ , p , V^μ verrà delineato nel prossimo paragrafo; vi si introdurranno alcuni elementi del formalismo spinoriale (cfr. [11]), ma essi saranno utilizzati esclusivamente quale mero strumento di semplificazione del calcolo (cfr. [12]).

4.2 Determinazione delle costanti di struttura di G_4 .

Per coerenza con le convenzioni d'uso in letteratura, *in questo paragrafo e nel resto del presente capitolo la segnatura della metrica sarà scelta pari a $(+, -, -, -)$ e l'indice riferito alla componente temporale sarà 0 anzichè 4.* Con queste convenzioni, le espressioni precedenti restano tutte inalterate eccetto la 4.9, che diventa:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -(\mu + p) V_\mu V_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

La base $\{X_0 \dots X_3\}$ di \mathfrak{g} , come pure le costanti di struttura di G_4 , è definita a meno di una trasformazione lineare non singolare; in particolare si sceglierà $\{X_0 \dots X_3\}$ in modo che in tale base: $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; ciò fissa la base a meno di una trasformazione di Lorentz.

Il passaggio dalla rappresentazione vettoriale alla rappresentazione spinoriale è governato dalle matrici:

$$\sigma^\mu_{AA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{AA}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

In σ^μ_{AA} [σ^{AA}_μ] l'indice μ è riferito alla riga [colonna], mentre la coppia di indici AA indica la colonna [riga] secondo la corrispondenza:

$$11 \leftrightarrow 1, \quad 12 \leftrightarrow 2, \quad 21 \leftrightarrow 3, \quad 22 \leftrightarrow 4.$$

Le componenti dei tensori (reali) di \mathfrak{g} vengono riconvertite come segue:

$$T^{AA}_{BB} = \sigma^{AA}_\mu T^\mu_\nu \sigma^\nu_{BB}, \quad T^\mu_\nu = \sigma^\mu_{AA} T^{AA}_{BB} \sigma^{BB}_\nu, \quad (4.15)$$

con:

$$T^{AA}_{BB} = \overline{T^{AA}_{BB}}. \quad (4.16)$$

Gli indici spinoriali si alzano e si abbassano per mezzo degli spinori antisimmetrici a due indici ϵ_{AB} , $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$ ($\epsilon_{12} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1$) nel modo seguente:

$$\psi^A = \epsilon^{AB} \psi_B, \quad \psi_B = \psi^A \epsilon_{AB}, \quad \varphi^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \varphi_{\dot{B}}, \quad \varphi_{\dot{B}} = \varphi^{\dot{A}} \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}. \quad (4.17)$$

Si ha in particolare:

$$\eta_{A\dot{A}B\dot{B}} = \epsilon_{AB} \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}, \quad \eta^{A\dot{A}B\dot{B}} = \epsilon^{AB} \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}, \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} = i (\epsilon_{AD} \epsilon_{BC} \epsilon_{\dot{A}\dot{C}} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}} - \epsilon_{AC} \epsilon_{BD} \epsilon_{\dot{A}\dot{D}} \epsilon_{\dot{B}\dot{C}}). \quad (4.19)$$

Lo spinore corrispondente a un tensore doppio antisimmetrico $F_{\mu\nu}$ può sempre scriversi nel modo che segue:

$$F_{A\dot{A}B\dot{B}} = \frac{1}{2} (F_{AB} \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \overline{F_{\dot{A}\dot{B}} \epsilon_{AB}}), \quad F_{AB} = F_{BA}. \quad (4.20)$$

Per esempio, il tensore di curvatura è antisimmetrico separatamente nella prima e nella seconda coppia di indici; lo spinore corrispondente si decompone pertanto in:

$$R_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} = \frac{1}{2} (\chi_{ABCD} \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \phi_{ABC\dot{D}} \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \epsilon_{CD} + \overline{\phi_{\dot{A}\dot{B}CD} \epsilon_{AB} \epsilon_{\dot{C}\dot{D}}} + \overline{\chi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} \epsilon_{AB} \epsilon_{CD}}) \quad (4.21)$$

con:

$$\chi_{ABCD} = \chi_{BACD} = \chi_{ABDC}, \quad \phi_{ABC\dot{D}} = \phi_{BAC\dot{D}} = \phi_{AB\dot{D}C}. \quad (4.22)$$

Allo stesso modo lo spinore $\Gamma_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}} \leftrightarrow \Gamma_{\rho\mu\nu}$ si separa in:

$$\Gamma_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}} = \frac{1}{2} (\Gamma_{A\dot{A}BC}\epsilon_{\dot{B}\dot{C}} + \overline{\Gamma_{A\dot{A}B\dot{C}}\epsilon_{BC}}), \quad \Gamma_{A\dot{A}BC} = \Gamma_{A\dot{A}CB}. \quad (4.23)$$

Definito: $\alpha_{C\dot{A}} := \Gamma_{A\dot{A}BC}^B$, si può ancora scrivere:

$$\Gamma_{A\dot{A}BC} = \alpha_{A\dot{A}BC} + \frac{1}{3} (\epsilon_{BA}\alpha_{C\dot{A}} + \epsilon_{CA}\alpha_{B\dot{A}}), \quad (4.24)$$

con $\alpha_{A\dot{A}BC}$ simmetrico rispetto agli indici A, B, C . $\alpha_{C\dot{A}}$ si separa nelle parti hermitiana e antihermitiana:

$$\begin{aligned} \alpha_{C\dot{A}} &= -k_{C\dot{A}} + i\mu_{C\dot{A}}, \\ k_{C\dot{A}} &= -\frac{1}{2} (\alpha_{C\dot{A}} + \overline{\alpha_{\dot{A}C}}) = \overline{k_{\dot{A}C}}, \quad \mu_{C\dot{A}} = -\frac{1}{2}i (\alpha_{C\dot{A}} - \overline{\alpha_{\dot{A}C}}) = \overline{\mu_{\dot{A}C}}. \end{aligned}$$

Contraendo la 4.23 con $\eta^{A\dot{A}C\dot{C}} = \epsilon^{AC}\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}$ si ottiene la seguente corrispondenza:

$$k_\alpha = \Gamma_{\mu\alpha}{}^\mu \leftrightarrow k_{A\dot{A}},$$

mentre usando la 4.19 si mostra che:

$$\mu_\alpha := (*\Gamma)_{\mu\alpha}{}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_\alpha{}^{\mu\rho\sigma}\Gamma_{\mu\rho\sigma} \leftrightarrow \mu_{A\dot{A}}.$$

Si può infine decomporre lo spinore $c_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}} \leftrightarrow c_{\rho\mu\nu}$:

$$c_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}} = \frac{1}{2} (c_{A\dot{A}BC}\epsilon_{\dot{B}\dot{C}} + \overline{c_{A\dot{A}B\dot{C}}\epsilon_{BC}}), \quad c_{A\dot{A}BC} = c_{A\dot{A}CB}. \quad (4.25)$$

Dalla relazione spinoriale corrispondente alla 4.4, coll'ausilio delle 4.23, 4.24, 4.25 e contraendo con $\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}$:

$$c_{A\dot{A}BC} = -\frac{1}{2} (\Gamma_{B\dot{A}CA} + \Gamma_{C\dot{A}BA}) + \frac{1}{2} (\epsilon_{AC}\overline{\alpha_{\dot{A}B}} + \epsilon_{AB}\overline{\alpha_{\dot{A}C}}). \quad (4.26)$$

Riscritta la 4.6 in forma spinoriale sostituendovi le 4.23, 4.25, si ricava:

$$\begin{aligned} R_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} &= \Gamma_{D\dot{D}B\dot{B}}{}^{P\dot{P}}\Gamma_{C\dot{C}P\dot{P}A\dot{A}} - \Gamma_{C\dot{C}B\dot{B}}{}^{P\dot{P}}\Gamma_{D\dot{D}P\dot{P}A\dot{A}} \\ &\quad - c^{P\dot{P}}{}_{C\dot{C}D\dot{D}}\Gamma_{P\dot{P}B\dot{B}A\dot{A}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Confrontando quest'ultima con la 4.21 e contraendo con $\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{\dot{C}\dot{D}}$ si ottiene:

$$\chi_{ABCD} = -\frac{1}{4} (\Gamma_D{}^{\dot{P}}{}_{B\dot{B}}{}^P\Gamma_{C\dot{C}P\dot{P}A\dot{A}} + \Gamma_C{}^{\dot{P}}{}_{B\dot{B}}{}^P\Gamma_{D\dot{D}P\dot{P}A\dot{A}}) + \frac{1}{2}c^{P\dot{P}}{}_{CD}\Gamma_{P\dot{P}B\dot{B}A\dot{A}}, \quad (4.28)$$

mentre ancora dal confronto con la 4.21, ma contraendo ora con $\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{CD}$ si ha:

$$\phi_{AB\dot{C}\dot{D}} = -\frac{1}{4} (\Gamma^Q{}_{\dot{D}B\dot{B}}{}^P\Gamma_{Q\dot{C}P\dot{P}A\dot{A}} + \Gamma^Q{}_{\dot{C}B\dot{B}}{}^P\Gamma_{Q\dot{D}P\dot{P}A\dot{A}}) + \frac{1}{2}\overline{c^{\dot{P}P}{}_{\dot{C}\dot{D}}}\Gamma_{P\dot{P}B\dot{B}A\dot{A}}. \quad (4.29)$$

Si è visto in precedenza che l'identità di Jacobi per le costanti di struttura di G_4 è equivalente alla 4.7; questa può essere riscritta in forma spinoriale facendo uso delle 4.18, 4.19 e della 4.21 e ricordando le simmetrie 4.22:

$$0 = (*R)_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}}{}^{B\dot{B}} = \frac{i}{2} \left(\phi_{AC\dot{A}\dot{C}} - \overline{\phi_{\dot{A}\dot{C}AC}} + \overline{\chi_{\dot{A}\dot{P}\dot{C}}^{\dot{P}} \epsilon_{AC}} - \chi_A{}^P{}_{PC} \epsilon_{\dot{A}\dot{C}} \right). \quad (4.30)$$

Contraendo la 4.30 con $\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}$ si ha:

$$\chi_A{}^P{}_{PC} = \frac{1}{2} \overline{\chi_{\dot{Q}\dot{P}\dot{Q}}^{\dot{P}} \epsilon_{AC}}, \quad (4.31)$$

che, dopo aver contratto ancora con ϵ^{AC} e sostituito il risultato in 4.31, porge:

$$\frac{1}{2} \overline{\chi_{\dot{Q}\dot{P}\dot{Q}}^{\dot{P}}} = \frac{1}{2} \chi_Q{}^P{}_{PQ} := \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.32)$$

Quest'ultima sostituita in 4.30 dà infine:

$$\phi_{AC\dot{A}\dot{C}} = \overline{\phi_{\dot{A}\dot{C}AC}}. \quad (4.33)$$

Le 4.31, 4.32, 4.33 sono dunque equivalenti alle identità di Jacobi 4.2.

Usando la 4.28 e la 4.26, e ricordando la definizione di $\alpha_{A\dot{B}}$ e di $k_{A\dot{B}}$, dalla 4.31 segue:

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_A{}^P{}_{PC} + \chi_C{}^P{}_{PA} \\ &= \frac{1}{4} (\alpha_{P\dot{P}} + \overline{\alpha_{\dot{P}P}}) \left(\Gamma_C{}^{\dot{P}P}{}_A + \Gamma_A{}^{\dot{P}P}{}_C \right) - \frac{1}{4} \left(\overline{\alpha_{\dot{P}C}} \alpha_A{}^{\dot{P}} + \overline{\alpha_{\dot{P}A}} \alpha_C{}^{\dot{P}} \right) \\ &= k_{P\dot{P}} c^{P\dot{P}}{}_{AC}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Viceversa, la 4.32 e la 4.34 implicano la 4.31.

Si può ora ricavare lo spinore $R_{A\dot{A}B\dot{B}} \leftrightarrow R_{\mu\nu}$; contraendo la 4.21 con $\eta^{A\dot{A}C\dot{C}}$, usando le 4.31, 4.32, 4.33, e contraendo successivamente con $\eta^{B\dot{B}D\dot{D}}$, si ha infatti:

$$R_{B\dot{B}D\dot{D}} = -\phi_{B\dot{D}D\dot{D}} + \lambda \epsilon_{BD} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \quad R = 4\lambda. \quad (4.35)$$

La 4.13 diventa dunque:

$$-\phi_{B\dot{D}D\dot{D}} + \lambda \epsilon_{BD} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}} = -(\mu + p) V_{B\dot{B}} V_{D\dot{D}} + p \epsilon_{BD} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \quad (4.36)$$

nella quale $\phi_{B\dot{D}D\dot{D}}$ è dato dalla 4.29. Si ha ancora:

$$V_{B\dot{B}} V_{D\dot{D}} - V_{B\dot{D}} V_{D\dot{B}} = \frac{1}{2} \epsilon_{BD} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \quad (4.37)$$

che segue dalle simmetrie del primo membro e dalla normalizzazione:

$$V_{P\dot{P}} V^{P\dot{P}} = 1. \quad (4.38)$$

Sostituendo la 4.37 nella 4.36 e separando le parti con diversa simmetria, le equazioni di Einstein si riscrivono:

$$\lambda = \frac{1}{4}\mu - \frac{3}{4}p, \quad (4.39)$$

$$\phi_{BD\dot{B}\dot{D}} = \frac{1}{2}(\mu + p)(V_{B\dot{B}}V_{D\dot{D}} + V_{B\dot{D}}V_{D\dot{B}}). \quad (4.40)$$

Si vede che la 4.39 implica la 4.32 poichè μ e p sono reali, e che la 4.40 implica la 4.33 in quanto $V_{B\dot{B}}$ è hermitiano.

Resta da imporre l'equazione di continuità per il tensore energia-impulso, o in altre parole si devono riscrivere le 4.11, 4.12 in forma spinoriale:

$$k_{P\dot{P}}V^{P\dot{P}} = 0, \quad (4.41)$$

$$V^{A\dot{A}}\left(\Gamma_{A\dot{A}BC}V^B{}_{\dot{C}} - \overline{\Gamma_{A\dot{A}BC}}V_C{}^{\dot{B}}\right) = 0. \quad (4.42)$$

Il risultato cui si è pervenuti è dunque il sistema di equazioni algebriche 4.34, 4.38, 4.39, 4.40, 4.41, 4.42, dal quale si vogliono ricavare le quantità $\Gamma_{A\dot{A}BC}$, μ , p , $V_{A\dot{A}}$ (nella 4.34 $c_{A\dot{A}BC}$ è espresso in funzione delle $\Gamma_{A\dot{A}BC}$ dalla 4.26, mentre nelle 4.39, 4.40 $\lambda = \frac{1}{2}\chi_Q{}^P{}_P{}^Q$ e $\phi_{AB\dot{A}\dot{B}}$ sono dati rispettivamente dalle 4.28, 4.29). Per trovare la soluzione generale si può ancora fare uso della libertà nella scelta della base ortonormale di \mathfrak{g} , definita a meno di una trasformazione di Lorentz, per aggiungere ulteriori condizioni semplificative. Ci si può così porre in un sistema di riferimento in cui è: $V_\alpha = (1, 0, 0, 0)$, e suddividere le soluzioni a seconda dei due casi:

1. $k_{A\dot{A}} \neq 0$. Dalla 4.41 segue che k è ortogonale a V ; ci si può ancora avvalere della libertà nella scelta della base del trispazio per avere: $k_\alpha = (0, 0, 0, \sqrt{2}r)$, con r parametro (reale) ausiliario, e per annullare una delle due componenti spaziali μ_1 o μ_2 di μ_a .
2. $k_{A\dot{A}} = 0$. Con un'opportuna trasformazione di Lorentz può aversi: $\mu_\alpha = (\mu_0, 0, 0, \mu_3)$; ciò fissa il riferimento a meno di una rotazione nel piano spaziale xy , ovvero a meno di una trasformazione nella base degli spinori data da: $L^A{}_B = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$.

La risoluzione del sistema comporta calcoli lunghi e faticosi, che non aggiungono nulla di nuovo a quanto detto sopra (nel primo caso sono svolti in [12], nel secondo si trovano in [13]). Nel caso 1 si ricava una classe di soluzioni con $\mu > 0$, $p \neq 0$ dipendenti da due parametri; nel caso 2 le soluzioni formano cinque classi con struttura diversa. I risultati sono riassunti nella lista seguente:

- $k_{A\dot{A}} = 0$.

1. $d\omega^0 = -\omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^0$, $d\omega^2 = \omega^0 \wedge \omega^1$, $d\omega^3 = 0$.
 $g = 2(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$.
 $\mu = p = \frac{1}{2}$, $V^\mu = (\sqrt{2}, 0, 0, 0)$.
2. $d\omega^0 = 0$, $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$, $d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1$, $d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$.
 $g = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$.
 $\mu = -3p = \frac{3}{4}$, $V^\mu = (1, 0, 0, 0)$.
3. $d\omega^0 = D\omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$, $d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1$, $d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$.
 $g = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - B^2(\omega^2)^2 - (1+B^2)(\omega^3)^2$.
 $\mu = \frac{32B^2 - 5(1+B^2)^2}{8B^2(1+B^2)}$, $p = -\frac{1+B^2}{8B^2}$, $V_\mu = \left(\sqrt{\frac{\mu-p}{\mu+p}}, 0, 0, \frac{-2p(1+B^2)}{\mu+p} \right)$.

Nelle formule precedenti:

$$\mu + p > 0 \implies \frac{1}{3} < B^2 < 3, \quad D^2 = \frac{8B^2 - (1+B^2)^2}{2(1+B^2)}.$$

Se $B = 1$, si riottiene il modello 2.

4. $d\omega^0 = -\omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^0$, $d\omega^2 = \omega^0 \wedge \omega^1$, $d\omega^3 = D\omega^2 \wedge \omega^1$.
 $g = (1+A^2)(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - A^2(\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$.
 $\mu = \frac{5(1+A^2)}{8A^2} - \frac{4}{(1+A^2)}$, $p = \frac{1+A^2}{8A^2}$, $V_\mu = \left(\frac{2p(1+A^2)}{\mu+p}, 0, 0, \frac{p-\mu}{\mu+p} \right)$.

Nelle formule precedenti:

$$D^2 = \frac{8A^2 - (1+A^2)^2}{2(1+A^2)^2} \geq 0, \quad \mu + p > 0 \implies 3 < A^2 \leq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Se $A^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, si riottiene il modello 1.

5. $d\omega^0 = -\omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^0$, $d\omega^2 = \omega^0 \wedge \omega^1$, $d\omega^3 = 0$.
 $g = (1+A^2)(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - A^2(\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$.
 $\mu = p = \frac{1}{1+A^2}$, $V^\mu = \left(\sqrt{\frac{1}{1+A^2}}, 0, 0, 0 \right)$.

Se $A = 1$, si riottiene il modello 1.

- $k_{AA} \neq 0$.

1. $d\omega^0 = [(T-A)\omega^1 - B\omega^2] \wedge \omega^3$,
 $d\omega^1 = [(T+A)\omega^0 + (1+C)\omega^1 + (D+S)\omega^2] \wedge \omega^3$,
 $d\omega^2 = [B\omega^0 + (D-S)\omega^1 + (1-C)\omega^2] \wedge \omega^3$,
 $d\omega^3 = 0$.
 $g = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$.
 $\mu = -\frac{5}{2}AT - 3$, $p = \frac{8}{5} + \frac{\mu}{5}$, $V^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Nelle formule precedenti S e T sono parametri indipendenti, mentre le altre costanti si ricavano da:

$$A = \frac{2T(T^2 - 2S^2 - 4)}{E}, \quad B = \frac{2ST(T^2 + 2S^2 + 2)}{E}, \quad C = \frac{T^2(4 - T^2 - 2S^2)}{E},$$

$$D = -\frac{6ST}{E},$$

con:

$$E = T^4 + 4T^2(S^2 - 2) + 4(1 + S^2)(4 + S^2).$$

Se $S = 0$, $T = 2$, si riottiene il modello 1.

I modelli 1 e 2 sono rispettivamente il modello di Gödel (descritto più dettagliatamente nei prossimi due paragrafi) e il modello di Einstein con curvatura spaziale positiva, come si vedrà meglio nella sezione che segue.

4.3 Il teorema di Gödel.

Si vogliono ora caratterizzare le soluzioni cosmologiche *spazialmente* omogenee per un fluido isotropo, le cui linee di universo formino una congruenza geodetica Γ , la quale corrisponda ad un moto rigido nel senso di Born. Tale requisito di rigidità si manifesta nel fatto che nell'espressione 2.7 per lo spostamento δX^i si annullino i termini di deformazione σ_{ij} e di espansione θ , lasciando invece completa libertà sul tensore di rotazione ω . La richiesta di omogeneità spaziale stabilisce, invece, l'esistenza di un fogliettamento di \mathcal{V}_4 con superfici di tipo spazio sulle quali agisce transitivamente un gruppo di isometrie; nel seguito si supporrà ulteriormente che tale azione sia libera, cioè che il gruppo sia un G_3 semplicemente transitivo; le superfici omogenee non sono in generale ortogonali a Γ , poichè ω può essere non nullo.

Per una congruenza geodetica, dall'analisi svolta nel §2.2 è noto che le condizioni $\sigma = \theta = 0$ sono matematicamente equivalenti al requisito:

$$V_{\mu||\nu} + V_{\nu||\mu} = 0. \quad (4.43)$$

V rappresenta cioè un campo di Killing non nullo e di tipo tempo che completa la terna spaziale generata da G_3 . Pertanto, *sotto le ipotesi indicate, e assumendo che \mathcal{V}_4 sia semplicemente connesso, \mathcal{V}_4 risulta globalmente isomorfo a un gruppo G_4 semplicemente connesso.*

Si può ora riscrivere la 4.43 in forma spinoriale:

$$\frac{1}{4} \left(V_{P\dot{A}} \Gamma_{\dot{B}\dot{B}\dot{A}}^P + V_{A\dot{P}} \overline{\Gamma_{\dot{B}\dot{B}\dot{A}}^{\dot{P}}} + V_{P\dot{B}} \Gamma_{A\dot{A}\dot{B}}^P + V_{B\dot{P}} \overline{\Gamma_{\dot{A}\dot{A}\dot{B}}^{\dot{P}}} \right) = 0. \quad (4.44)$$

I modelli cercati sono dunque le soluzioni del sistema algebrico ricavato nel paragrafo precedente con in più le condizioni 4.44, cioè sono tutti e soli i gruppi G_4 semplicemente connessi le cui costanti di struttura risolvono le equazioni 4.34, 4.38, 4.39, 4.40, 4.41, 4.42, 4.44. Nel caso 1 del paragrafo precedente ($k \neq 0$) si ricava che le costanti di struttura non nulle, la densità di massa e la pressione sono date da:

$$\begin{aligned} c^1_{31} &= -\sqrt{2}A, & c^0_{31} &= 2\sqrt{2}B, \\ \mu = p &= A^2, & 2B^2 &= A^2 = \text{costante}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nel caso 2 ($k = 0$) le soluzioni con $\mu > 0$, $\mu + p \neq 0$ sono le seguenti:

$$\begin{aligned} c^0_{12} = \sqrt{2}A, \quad c^1_{20} = c^2_{01} = -\frac{A}{\sqrt{2}}, \quad c^1_{23} = c^2_{31} = -\sqrt{2}B, \\ \mu = p = \frac{1}{2}A^2, \quad A, B = \text{costante.} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} c^1_{23} = c^2_{31} = c^3_{12} = -\sqrt{2}A, \quad c^1_{20} = c^2_{01} = \sqrt{2}\left(B - \frac{1}{2}A\right) \\ \mu = -3p = \frac{3}{2}A^2, \quad A, B = \text{costante.} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Le costanti di struttura date in 4.47 sono le stesse ricavabili per il modello di Einstein di tipo iii (con $G = \text{costante}$ e con curvatura spaziale positiva). Ciò può essere visto utilizzando la base $\omega^\mu = \omega^\mu_\alpha dx^\alpha$, con:

$$\omega^\mu_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\omega}{\sqrt{2}A} & -\sin x^1 \cos \frac{\omega}{\sqrt{2}A} & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\omega}{\sqrt{2}A} & -\sin x^1 \sin \frac{\omega}{\sqrt{2}A} & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \frac{x^1}{\sqrt{2}A} & -\frac{1}{\sqrt{2}A} \end{pmatrix},$$

in cui si è posto: $\omega = \sqrt{2}\left(B - \frac{1}{2}A\right)x^0 + x^3$. Si può infatti verificare che le $c^\mu_{\nu\rho}$ ricavabili da: $d\omega^\mu = -\frac{1}{2}c^\mu_{\nu\rho}\omega^\nu \wedge \omega^\rho$ coincidono con quelle date in 4.47, mentre la metrica:

$$\begin{aligned} g &= \eta_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes \omega^\nu \\ &= (dx^0)^2 - \frac{1}{2A^2} \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + 2 \cos x^1 dx^2 dx^3 \right] \end{aligned}$$

è tale che le superfici a $x^0 = \text{costante}$ hanno curvatura costante positiva e indipendente da x^0 .

In modo analogo si mostra che le soluzioni 4.45, 4.46 corrispondono entrambe allo stesso modello cosmologico, benchè siano espresse in due basi diverse; tale modello è il **modello di Gödel** (cfr. [14]), la cui metrica in coordinate $\{x^0 \dots x^3\}$ è data da:

$$g = C^2 \left[(dx^0 + e^{-x^3} dx^1)^2 - \frac{1}{2} e^{-2x^3} (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \right], \quad (4.48)$$

dove: $C = \text{costante} > 0$. Infatti basta porre:

$$\begin{aligned} \omega^0 &= C \left(dx^0 + e^{-x^3} dx^1 \right), \quad \omega^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} C e^{-x^3} dx^1, \\ \omega^2 &= C dx^2, \quad \omega^3 = C dx^3. \end{aligned} \quad (4.49)$$

e in tale base le costanti di struttura coincidono con le 4.45 con: $B = \frac{1}{2C}$, $A = \mp \frac{1}{\sqrt{2}C}$. Se invece si pone: $\omega^\mu = \omega^\mu_\alpha dx^\alpha$, con:

$$\omega^\mu_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 & \frac{e^{x^1}}{A} & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\tau}{A} & -e^{x^1} \sin \frac{\tau}{\sqrt{2}A} & 0 \\ 0 & \sin \frac{\tau}{A} & -e^{x^1} \cos \frac{\tau}{\sqrt{2}A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A} \end{pmatrix}$$

e: $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - 2\frac{B}{A}x^3)$, si ottengono le $c^\mu{}_{\nu\rho}$ date in 4.46 e la metrica:

$$g = \frac{1}{A^2} \left[\left(dx^0 + e^{x^1} dx^2 \right)^2 - \frac{1}{2} e^{2x^1} (dx^2)^2 - (dx^1)^2 - (dx^3)^2 \right],$$

che è evidentemente la 4.48 con $x^1 \leftrightarrow -x^3$, $C = A^{-1}$.

Si è così dimostrato il seguente teorema (enunciato da Gödel in [14] e dimostrato da Ozsváth in [12]):

Teorema 4.3.1 *Il modello di Gödel e il modello di Einstein con curvatura spaziale positiva sono tutte e sole le soluzioni cosmologiche spazialmente omogenee con $0 < \mu \neq -p$ e tali che i moti naturali (cioè le linee di universo del fluido) descrivano una congruenza Γ di curve geodetiche equidistanti.*

Al contrario del modello di Einstein, *il modello di Gödel ha rotazione*. Dal corollario 2.9 dell'equazione di Raychaudhuri con $\theta = 0$, $\mu = p > 0$, si ha infatti: $\omega^2 - \sigma^2 - 2\mu = 0$, cioè $\omega \neq 0$. Il tensore ω può essere ricavato esplicitamente osservando che nella base 4.49 ω^0 è il campo di velocità V del fluido espresso in forma covariante; si ha dunque:

$$\omega = d\omega^0 = -\frac{\sqrt{2}}{C}\omega^1 \wedge \omega^3.$$

Dal fatto che nel modello di Gödel si assume $\mu = p$ segue poi che esso prevede una velocità del suono pari a quella della luce.

4.4 Acausalità del modello di Gödel.

Un aperto $U \subset \mathcal{V}_4$ è **temporalmente ordinato** se e solo se non esistono curve chiuse di tipo tempo interamente contenute in U . Un aperto $V \subset \mathcal{V}_4$ ammette un **ordinamento temporale locale** se per ogni $x \in V$ esiste un intorno aperto $U_x \subset V$ di x tale che U_x sia temporalmente ordinato.

In virtù del fatto che la metrica g di \mathcal{V}_4 è iperbolica, si dimostra facilmente che \mathcal{V}_4 ammette un *ordinamento temporale locale*. Fissato infatti $x \in \mathcal{V}_4$, è sempre possibile trovare una superficie $\pi_x \ni x$ e un intorno aperto $U'_x \ni x$ tali che $S = \pi_x \cap U'_x$ sia una superficie di tipo spazio (π_x è una qualunque superficie scelta in modo che $T_x(\pi_x)$ sia un sottospazio di $T_x(\mathcal{V}_4)$ con metrica definita positiva). In un intorno $U_x \subset U'_x$ si può dunque costruire il sistema di coordinate gaussiane $\{x^0 \dots x^3\}$ associato a S (cfr. nota 4, pag. 35), nel quale la metrica si scrive:

$$g = (dx^0)^2 - g_{ij}^+(x^0 \dots x^3) dx^i \otimes dx^j,$$

dove g_{ij}^+ è definita positiva (la segnatura di g è $(+, -, -, -)$ per coerenza coi due paragrafi precedenti). Se $\gamma = \gamma(\xi)$ è una curva di tipo tempo in U_x , il

suo vettore tangente è tale che $\left(\frac{d\gamma(\xi)}{d\xi}, \frac{d\gamma(\xi)}{d\xi}\right) = f^2(\xi) > 0$, cioè:

$$\left(\frac{dx_\gamma^0}{d\xi}\right)^2 - g_{ij}^+(x^0 \dots x^3) \frac{dx_\gamma^i}{d\xi} \frac{dx_\gamma^j}{d\xi} = f^2(\xi) > 0. \quad (4.50)$$

Poichè g_{ij}^+ è definita positiva, la 4.50 mostra che $\frac{dx_\gamma^0}{d\xi} \neq 0$ lungo γ , cioè x_γ^0 è una funzione strettamente monotona di ξ , e dunque la curva non può chiudersi.

In generale, *il fatto che \mathcal{V}_4 ammette un ordinamento temporale locale non implica che \mathcal{V}_4 sia temporalmente ordinato.*

Se lo spazio-tempo è descritto dal modello FRW e se si assume che \mathcal{V}_4 sia semplicemente connesso, allora il tempo cosmico t è definito globalmente, e si verifica con facilità che \mathcal{V}_4 ammette un ordinamento temporale globale nel senso specificato sopra¹.

Nel caso in cui \mathcal{V}_4 è la varietà (\mathbb{R}^4, g) , essendo g la metrica di Gödel 4.48, si verifica che \mathcal{V}_4 non è temporalmente ordinato, benchè esso sia semplicemente connesso. Infatti, la 4.48 (con $C = 1$) si decompone nella somma:

$$g = g_I + g_{II},$$

con:

$$\begin{aligned} g_I &= \left(dx^0 + e^{-x^3} dx^1\right)^2 - \frac{1}{2}e^{-2x^3} (dx^1)^2 - (dx^3)^2, \\ g_{II} &= -(dx^2)^2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

La parte non banale di (\mathbb{R}^4, g) è dunque (\mathbb{R}^3, g_I) . Passando alle nuove coordinate $\{(t, r, \varphi) \mid (t, r, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times (0, 2\pi)\}$ definite da:

$$\begin{aligned} e^{-x^3} &= \cosh 2r + \sinh 2r \cos \varphi, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 e^{-x^3} &= \sinh 2r \sin \varphi, \\ \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^0 - 2t) &= \arctan\left(e^{-2r} \tan \frac{1}{2}\varphi\right), \end{aligned}$$

nelle quali si identifica $\varphi = 0$ con $\varphi = 2\pi$, la metrica g_I si riscrive:

$$\begin{aligned} g_I &= 4 \left[dt^2 - dr^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\varphi^2 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \sinh^2 r (d\varphi \otimes dt + dt \otimes d\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

¹Ciò non è più vero se \mathcal{V}_4 non è semplicemente connesso. Per esempio, il modello di Einstein di tipo iii (con curvatura spaziale positiva) semplicemente connesso è isomorfo a $\mathbb{R} \times S^3$; se si identificano i bordi superiore e inferiore della striscia $[-1, 1] \times S^3$, \mathcal{V}_4 assume la topologia di un toro e perde l'ordinamento temporale globale.

Quest'espressione mostra che, in aggiunta al gruppo di isometrie G_4 transitivo che agisce per costruzione in (\mathbb{R}^4, g) , g_I (e dunque g) è anche simmetrica rispetto alle rotazioni intorno l'asse $r = 0$. Dalla 4.52 si vede che le curve chiuse a $t = \text{costante}$, $r = \text{costante} > \ln(1 + \sqrt{2})$ sono di tipo tempo (la curva a $t = \text{costante}$, $r = \text{costante} = \ln(1 + \sqrt{2})$ è chiusa e di tipo luce). Poichè \mathcal{V}_4 ammette l'azione transitiva di un gruppo di isometrie, segue che per ogni suo punto passano curve chiuse e di tipo tempo. $\mathcal{V}_4 \cong (\mathbb{R}^4, g)$ non ammette dunque alcun ordinamento temporale globale.

Dall'acausalità del modello di Gödel segue direttamente che non esistono superfici senza bordo in (\mathbb{R}^4, g) che siano ovunque di tipo spazio. Se infatti per assurdo S fosse una di tali superfici, esisterebbe una curva γ chiusa e di tipo tempo che attraverserebbe S un numero dispari di volte. Poichè deformando γ con continuità il numero di intersezioni con S può variare soltanto di una quantità pari, seguirebbe che γ non può essere ricondotta ad un punto, in contraddizione col fatto che (\mathbb{R}^4, g) è semplicemente connesso.

Dall'espressione 4.48 per la metrica di Gödel (con $C = 1$) è possibile ricavare col calcolo diretto i simboli di Christoffel in coordinate $\{x^0 \dots x^3\}$, e dunque l'equazione delle geodetiche di (\mathbb{R}^4, g) ; quest'ultima è risolubile in modo esplicito (cfr. [15]) e conduce alla seguente famiglia di curve γ di tipo tempo e con vettore tangente normalizzato a 1 (ξ è il parametro affine, $c_0, c_1, c_2, c_3, A, B, C$ sono costanti di integrazione):

$$\begin{aligned} x_\gamma^0 &= - \left(\frac{2D^2}{D^2 - B^2} \right)^{\frac{1}{2}} \xi + 2\sqrt{2} \arctan \left(\sqrt{\frac{D-B}{D+B}} \tan \xi \right) + c_0, \\ x_\gamma^1 &= 2e^{c_3} \left(\frac{2B^2}{D^2 - B^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tan \xi}{1 + \frac{D-B}{D+B} \tan^2 \xi} + c_1, \\ x_\gamma^2 &= \frac{2C}{(D^2 - B^2)^{\frac{1}{2}}} \xi + c_2, \\ x_\gamma^3 &= - \ln \left(\frac{1 + \frac{D-B}{D+B} \tan^2 \xi}{1 + \tan^2 \xi} \right) + c_3; \end{aligned}$$

le costanti di integrazione A, B, C vanno scelte in modo che:

$$D^2 = 2(B^2 + C^2 + 1). \quad (4.53)$$

Nelle coordinate $\{t, r, \varphi, x^2\}$, se si sceglie la costante di integrazione c_3 in modo che: $e^{2c_3} = \frac{D-B}{D+B}$ (non è restrittivo), si ha:

$$\begin{aligned} \cosh 2r_\gamma &= \text{costante} = \sqrt{\frac{D^2 + B^2}{2(D^2 - B^2)}}, \\ \sin \varphi_\gamma &= \sin 2\xi \implies \varphi_\gamma = 2\xi \text{ se } \varphi_\gamma \in (0, 2\pi), \xi \in (0, \pi), \\ t_\gamma &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{D}{2\sqrt{D^2 - B^2}} \right) \xi \equiv \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cosh 2r_\gamma \right) \xi. \end{aligned}$$

Poichè dalla 4.53 si ricava che $1 \leq \cosh 2r_\gamma \leq \sqrt{2}$, segue che la costante di proporzionalità fra ξ e t_γ è sempre strettamente positiva. Se ne conclude che nel modello di Gödel non esistono geodetiche di tipo tempo chiuse.

Capitolo 5

Il modello spazialmente omogeneo generale.

5.1 Definizione e caratteristiche principali.

Si è visto nel precedente capitolo che la richiesta di omogeneità spazio-temporale, benchè matematicamente consistente, conduce direttamente a modelli cosmologici privi di espansione, in evidente contrasto con la realtà sperimentale. Si deve dunque assumere che l'universo abbia un minor grado di simmetria.

In questa sezione si postulerà che in \mathcal{V}_4 sia definita l'azione $\sigma : G_3 \times \mathcal{V}_4 \rightarrow \mathcal{V}_4$ di un gruppo tridimensionale G_3 di isometrie, e che σ sia semplicemente transitiva. Sotto l'ulteriore ipotesi che le superfici omogenee rispetto a σ siano di tipo spazio, utilizzando uno dei risultati ottenuti in §1.4 la metrica può localmente scriversi:

$$g = -dt^2 + g_{ij}(t) \omega^i \otimes \omega^j, \quad (5.1)$$

con:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} c^i{}_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \quad c^i{}_{jk} = \text{costante}. \quad (5.2)$$

Le $c^i{}_{jk}$ sono le costanti di struttura di G_3 .

Esistono in tutto nove gruppi tridimensionali non isomorfi, classificati (da Bianchi, cfr. [16]) secondo le loro costanti di struttura in una base opportuna di \mathfrak{g} ; indicando con $\{X_1, X_2, X_3\}$ tale base, la classificazione è la seguente:

- I $[X_i, X_j] = 0 \quad i, j = 1, 2, 3;$
- II $[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = 0;$
- III $[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1;$

- IV $[X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1 + X_2, [X_3, X_1] = -X_1;$
V $[X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_2, [X_3, X_1] = -X_1;$
VI $[X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = qX_2, [X_3, X_1] = -X_1, q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\};$
VII $[X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2, [X_3, X_1] = -X_2, q^2 < 4;$
VIII $[X_1, X_2] = X_1, [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -2X_2;$
IX $[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

Il gruppo I è evidentemente il G_3 abeliano; i gruppi da I a VII contengono un sottogruppo abeliano G_2 , mentre VIII e IX sono gruppi non solubili; IX non ha sottogruppi bidimensionali.

Dall'espressione 5.1 della metrica di \mathcal{V}_4 e con l'ausilio delle 5.2 è possibile calcolare i coefficienti di connessione nella base anolonoma $\{X_1 \dots X_4 = \frac{\partial}{\partial t}\}$ duale delle forme $\{\omega^1 \dots \omega^4 = dt\}$; essi sono definiti da:

$$\nabla_{X_\mu} X_\nu = \Gamma_{\nu\mu}^\rho X_\rho.$$

L'assenza di torsione implica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho = c^\rho_{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

con $c^\rho_{\mu\nu} = 0$ ogniqualvolta almeno uno dei tre indici non è spaziale, e con c^i_{jk} definite dalle equazioni 5.2. Da $\nabla g = 0$ segue poi:

$$X_\rho(g_{\mu\nu}) = \Gamma_{\rho\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma g_{\sigma\mu}. \quad (5.4)$$

Combinando le relazioni 5.3 e 5.4 si ricava l'espressione esplicita dei coefficienti della connessione riemanniana:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [X_\mu(g_{\nu\sigma}) + X_\nu(g_{\mu\sigma}) - X_\sigma(g_{\mu\nu}) - g_{\nu\tau} c^\tau_{\mu\sigma} - g_{\mu\tau} c^\tau_{\nu\sigma} + g_{\sigma\tau} c^\tau_{\mu\nu}]. \quad (5.5)$$

Nel caso in esame si calcola:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= -\frac{1}{2} g^{ks} (g_{jt} c^t_{is} + g_{it} c^t_{js}) + \frac{1}{2} c^k_{ij}, & \Gamma_{ij}^4 &= \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} = \Gamma_{ji}^4, \\ \Gamma_{i4}^k &= \frac{1}{2} g^{ks} \dot{g}_{is} = \Gamma_{4i}^k. \end{aligned} \quad (5.6)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$ ogniqualvolta almeno due indici sono temporali. Dalla 5.6 e dall'espressione generale:

$$R_{\mu\nu} = X_\rho(\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - X_\nu(\Gamma_{\rho\mu}^\rho) + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - c^\sigma_{\rho\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \quad (5.7)$$

si ottengono le seguenti componenti del tensore di Ricci nella base $\{\omega^1 \dots \omega^4\}$:

$$\begin{aligned}
R_{ij} = & \frac{1}{2}\ddot{g}_{ij} - \frac{1}{2} \left[g^{ts} \left(g_{ik}c^k_{js} + g_{jk}c^k_{is} \right) - c^t_{ji} \right] c^m_{mt} + \frac{1}{4}\dot{g}_{ij}\dot{g}_{ks}g^{ks} \\
& - \frac{1}{4}g_{ik}g_{jl}g^{mp}g^{ts}c^k_{ms}c^l_{tp} - \frac{1}{2}\dot{g}_{is}\dot{g}_{jt}g^{ts} + \frac{1}{2}g_{tk}g^{ms}c^k_{is}c^t_{mj} \\
& - \frac{1}{2}c^t_{mj}c^m_{ti}, \tag{5.8}
\end{aligned}$$

$$R_{i4} = \frac{1}{2}\dot{g}_{is}g^{ts}c^k_{kt} - \frac{1}{4}\dot{g}_{ks}g^{ks}c^k_{ki} - \frac{1}{4}\dot{g}_{ks}g^{ts}c^k_{ti}, \tag{5.9}$$

$$R_{44} = -\frac{1}{2}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \frac{1}{4}\dot{g}_{is}\dot{g}_{jt}g^{js}g^{it}. \tag{5.10}$$

A titolo di esempio, in un modello spazialmente omogeneo rispetto al gruppo di isometrie G_3 abeliano (tipo I) si ha $c^i_{jk} = 0$ in qualunque base invariante, e dunque da 5.9 segue: $R_{i4} = 0$. Il tensore energia-impulso per un fluido isotropo è dato da: $T_{\mu\nu} = (\mu + p)V_\mu V_\nu + pg_{\mu\nu}$; quindi dalle equazioni di campo si ottiene:

$$0 = R_{i4} - \frac{1}{2}Rg_{i4} = T_{i4} = (\mu + p)V_i V_4 + pg_{i4} = (\mu + p)V_i V_4.$$

Nell'ipotesi $\mu + p \neq 0$, ciò comporta $V_\mu = (0, 0, 0, -1)$, mostrando che in un modello spazialmente omogeneo di tipo I non può aversi rotazione.

5.2 Dati iniziali per le equazioni del campo gravitazionale.

L'analisi che segue ha validità del tutto generale; si assumerà che \mathcal{V}_4 sia una varietà analitica, in modo che siano soddisfatte le ipotesi sotto le quali è applicabile il teorema di Cauchy-Kowalewski sull'esistenza e unicità locale della soluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Fissata una qualunque superficie π di tipo spazio in \mathcal{V}_4 , la soluzione delle equazioni di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{5.11}$$

è localmente completamente determinata dalla conoscenza della seconda forma fondamentale di π e dall'assegnazione del tensore metrico e del tensore energia-impulso su π (e, naturalmente, dalla conoscenza delle equazioni costitutive del fluido stesso). Per provare quanto detto, si consideri il sistema di coordinate gaussiane $\{x^1, x^2, x^3, t\}$ associate alla superficie π (cfr. nota 4, pag. 35); in tale sistema di coordinate, π è la sottovarietà di \mathcal{V}_4 a $t = 0$, e la metrica è data da:

$$g = -dt^2 + g_{ij}(x^1, x^2, x^3, t) dx^i \otimes dx^j. \tag{5.12}$$

I coefficienti di connessione non nulli sono:

$$\Gamma_{ij}{}^k = \bar{\Gamma}_{ij}{}^k, \quad \Gamma_{ij}{}^4 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}, \quad \Gamma_{4j}{}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial t}, \quad (5.13)$$

dove con $\bar{\Gamma}_{ij}{}^k$ si sono indicati i coefficienti della connessione associata alla metrica indotta sulle superfici a $t = \text{costante}$ espressi nelle coordinate $\{x^1, x^2, x^3\}$; i coefficienti $\Gamma_{ij}{}^4$ sono determinati in $t = 0$ dalla seconda forma fondamentale di π , in quanto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$ è una base per $T(\pi)$ e si ha:

$$S \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{ij}{}^4 \frac{\partial}{\partial t};$$

infine i termini $\Gamma_{4j}{}^i$ si ricavano da $\Gamma_{ij}{}^4$ e da g_{ij} . In conclusione, la conoscenza della metrica nei punti di π e della seconda forma fondamentale di π determina i dati iniziali:

$$g_{ij}|_{\pi}, \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right|_{\pi}. \quad (5.14)$$

Questi ultimi non sono tuttavia completamente arbitrari; per esempio, nel caso $T^{\mu\nu} = 0$, nelle equazioni di Einstein nel vuoto:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (5.15)$$

è possibile separare la parte dipendente da $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2}$ (non assegnata in π coi dati iniziali) dalla parte ricavabile in π da 5.14 (inglobata genericamente nei termini $\omega_{\mu\nu}$):

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} + \omega_{ij} = 0, \quad (5.16)$$

$$R_{i4} = \omega_{i4} = 0, \quad (5.17)$$

$$R_{44} = -\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} + \omega_{44} = 0. \quad (5.18)$$

Le 5.16 costituiscono un sistema di equazioni differenziali nelle incognite $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, x^3, t)$, risolubile in modo univoco una volta assegnati i dati iniziali 5.14 (in virtù del teorema di Cauchy-Kowalewski). Le 5.17, 5.18 pongono invece vincoli sulle 5.14. Indicato infatti con: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ il tensore di Einstein, se le 5.16 sono soddisfatte, le 5.17, 5.18 diventano equivalenti a:

$$G^4{}_{\mu} = 0 \quad \mu = 1 \dots 4;$$

queste espressioni non contengono derivate seconde di g_{ij} rispetto a t , e costituiscono dunque in π un insieme di restrizioni sulle 5.14. Se infine i dati iniziali sono scelti in modo che: $G^4{}_{\mu}|_{\pi} = 0$, dall'annullarsi della divergenza del tensore G segue che le 5.17, 5.18 sono soddisfatte in conseguenza delle 5.16 anche per $t \neq 0$; si ha infatti:

$$0 = G^{\mu}{}_{\nu||\mu} = G^4{}_{\nu||4} + G^i{}_{\nu||i} \quad \nu = 1 \dots 4, \quad (5.19)$$

mentre dalla 5.16 segue:

$$G^i_j = \frac{1}{2}R_{44}, \quad G^i_4 = g^{ik}R_{k4}, \quad G^4_i = -R_{4i}, \quad G^4_4 = -\frac{1}{2}R_{44}.$$

Queste ultime, inserite nelle 5.19, danno luogo al sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{\partial G^4_\nu}{\partial t} = M^{i\sigma}_\nu \frac{\partial G^4_\nu}{\partial x^i} + N^{\sigma\nu} G^4_\sigma \quad \nu = 1 \dots 4, \quad (5.20)$$

nelle quali i coefficienti $M^{i\sigma}_\nu$, $N^{\sigma\nu}$ dipendono dalla metrica ricavata da 5.16. In virtù del teorema di Cauchy-Kowalewski, l'unica soluzione di 5.20 soddisfacente le condizioni iniziali $G^4_\nu|_\pi = 0$ è: $G^4_\nu = 0$, e quindi le 5.17, 5.18 sono verificate anche per $t \neq 0$.

Nel caso più generale in cui il tensore energia-impulso nella 5.11 è non nullo, i dati iniziali 5.14 vanno completati con $T_{\mu\nu}|_\pi$ e con le eventuali equazioni costitutive del continuo. Per esempio, nel caso di una polvere di particelle non interagenti ($T_{\mu\nu} = \mu V_\mu V_\nu$), l'assegnazione del tensore energia-impulso in π permette di determinare, mediante l'estrazione degli autovalori e degli autovettori di $T|_\pi$, le funzioni $\mu|_\pi$, $V_\mu|_\pi$. Le equazioni analoghe delle 5.16 sono:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} + \omega_{ij} \equiv \mu \left(V_i V_j + \frac{1}{2} g_{ij} \right), \quad (5.21)$$

mentre le equazioni di continuità per T danno (cfr. §2.1):

$$V^\mu V_{\nu||\mu} = V^4 \frac{\partial V_\nu}{\partial t} + \omega_\nu \equiv 0, \quad (5.22)$$

$$(\mu V^\mu)_{||\mu} = V^4 \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial V_4}{\partial t} + \omega \equiv 0, \quad (5.23)$$

essendo V^4 , μ non nulli e dipendendo $\omega_{ij}|_\pi$, $\omega_\nu|_\pi$, $\omega|_\pi$ dai soli dati iniziali:

$$g_{ij}|_\pi, \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right|_\pi, \quad \mu|_\pi, \quad V_\mu|_\pi. \quad (5.24)$$

Le equazioni corrispondenti nel caso presente alle 5.17, 5.18 pongono come in precedenza vincoli sui dati iniziali 5.24, i quali, una volta soddisfatti per $t = 0$, vengono automaticamente propagati nella regione $t \neq 0$ in virtù dell'equazione:

$$(G^\mu_\nu - T^\mu_\nu)_{||\mu} = 0 \quad \nu = 1 \dots 4.$$

L'argomento è simile al precedente, e non verrà ripetuto.

5.3 Il modello vuoto spazialmente omogeneo di tipo I generale.

La discussione svolta nel precedente paragrafo *prova l'esistenza di modelli vuoti spazialmente omogenei per ciascuna delle tipologie I ÷ IX*; riferendosi alla base $\{\omega^1 \dots \omega^4 = dt\}$ in cui è espressa la metrica 5.1, all'istante iniziale t_0 è infatti sufficiente scegliere $g_{ij}(t_0)$, $\dot{g}_{ij}(t_0)$ in modo che:

$R_{44}(t_0) = R_{4i}(t_0) = 0$, con R_{44} , R_{4i} ricavate da 5.9, 5.10 e con le costanti $c^i{}_{jk}$ caratteristiche del gruppo in esame; per ciascuna assegnazione dei dati iniziali compatibile con tale requisito, il sistema di equazioni differenziali ordinarie: $R_{ij} = 0$, con R_{ij} date da 5.8, ammette un'unica soluzione in un intorno di t_0 .

Il gruppo G_3 abeliano ha nulle le costanti di struttura in ogni base left-invariante; pertanto, per ogni scelta delle forme $\{\omega^1 \dots \omega^4 = dt\}$ di \mathcal{V}_4 invarianti rispetto a G_3 , si ottiene una base olonoma:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}c^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k = 0 \implies \omega^i = df^i \quad i = 1, 2, 3.$$

Fissato l'istante iniziale t_0 , in virtù di noti risultati di algebra è sempre possibile ricondurre le matrici simmetriche $g_{ij}(t_0)$, $\dot{g}_{ij}(t_0)$ date dalla metrica 5.1 alla forma in cui:

$$\bar{g}_{ij}(t_0) = \delta_{ij}, \quad \dot{\bar{g}}_{ij}(t_0) = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad (5.25)$$

con a_1, a_2, a_3 costanti, mediante un'opportuna trasformazione di base:

$$\bar{\omega}^i = A^i{}_j \omega^j, \quad A^i{}_j = \text{costante} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

In questo modo le $\{\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^3, dt\}$ sono ancora forme duali di una base di \mathcal{V}_4 invariante rispetto all'azione di G_3 e continuano pertanto a soddisfare le 5.2 con $\bar{c}^i{}_{jk} = 0$. Le equazioni del campo gravitazionale nel vuoto con le componenti del tensore di Ricci 5.8, 5.9, 5.10 si riscrivono in questo caso:

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\ddot{\bar{g}}_{ij} + \frac{1}{4}\dot{\bar{g}}_{ij}\dot{\bar{g}}_{ks}\bar{g}^{ks} - \frac{1}{2}\dot{\bar{g}}_{is}\dot{\bar{g}}_{jt}\bar{g}^{ts} \equiv 0, \quad (5.26)$$

$$R_{44} = -\frac{1}{2}\bar{g}^{ij}\ddot{\bar{g}}_{ij} + \frac{1}{4}\dot{\bar{g}}_{is}\dot{\bar{g}}_{jt}\bar{g}^{js}\bar{g}^{it} \equiv 0, \quad (5.27)$$

mentre le equazioni: $R_{4i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, sono identicamente soddisfatte. Se si inseriscono le funzioni:

$$\bar{g}_{ij}(t) = 0 = \text{costante} \quad i \neq j$$

in 5.26, si ottiene che le equazioni $R_{ij} = 0$ per $i \neq j$ sono soddisfatte, mentre le rimanenti porgono:

$$R_{ii} = \frac{1}{2}\ddot{\bar{g}}_{ii} + \frac{1}{4}\dot{\bar{g}}_{ii} \frac{d}{dt} \ln(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}\bar{g}_{33}) - \frac{1}{2} \frac{(\dot{\bar{g}}_{ii})^2}{\bar{g}_{ii}} \equiv 0 \quad (\text{non sommato su } i). \quad (5.28)$$

Il sistema di tre equazioni differenziali 5.28 ammette un'unica soluzione soddisfacente i dati iniziali:

$$\bar{g}_{ii}(t_0) = 1, \quad \dot{\bar{g}}_{ii}(t_0) = a_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.29)$$

Si conclude pertanto che le funzioni $\bar{g}_{ii}(t)$ soluzione di 5.28 coi dati iniziali 5.29 e le funzioni $\bar{g}_{ij}(t) = 0 = \text{costante}$, con $i \neq j$, sono l'unica soluzione del sistema di equazioni differenziali 5.26 con le condizioni iniziali 5.25 (in virtù del teorema di Cauchy-Kowalewski). Dunque nella base $\{\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^3, dt\}$ la metrica resta diagonale anche per $t \neq 0$; combinando questo risultato col fatto che le forme $\bar{\omega}^i$ sono esatte, si ricava che *in un opportuno sistema di coordinate $\{x^1, x^2, x^3, t\}$ la metrica 5.1 per il modello vuoto spazialmente omogeneo rispetto al gruppo di isometrie G_3 abeliano è:*

$$g = -dt^2 + \bar{g}_{11}(t) (dx^1)^2 + \bar{g}_{22}(t) (dx^2)^2 + \bar{g}_{33}(t) (dx^3)^2, \quad (5.30)$$

con: $\bar{\omega}^i = dx^i$.

L'equazione 5.27 per R_{44} pone un vincolo sui dati iniziali 5.25; questi ultimi vanno infatti scelti in modo che sia:

$$\sum_{k,l=1}^3 a_k a_l = 0.$$

Il sistema di equazioni differenziali ordinarie 5.28 si risolve agevolmente operando la sostituzione (lecita in quanto la metrica spaziale deve essere definita positiva in un intorno di t_0):

$$\bar{g}_{ii}(t) = e^{g_i(t)} \quad i = 1, 2, 3;$$

in questo modo le 5.28 diventano:

$$\ddot{g}_i + \frac{1}{2} \dot{g}_i (\dot{g}_1 + \dot{g}_2 + \dot{g}_3) = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.31)$$

Sommando le 5.31 e ponendo:

$$h = g_1 + g_2 + g_3,$$

si ottiene:

$$\ddot{h} + \frac{1}{2} \dot{h}^2 = 0,$$

che ha la soluzione generale:

$$h(t) = 2 \ln |k(t+c)| \quad k, c \text{ costanti} \quad (5.32)$$

oppure:

$$h(t) = \text{costante}. \quad (5.33)$$

Sostituendo la 5.32 in ciascuna delle 5.31 si ricava:

$$\ddot{g}_i + \frac{1}{t+c} \dot{g}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

la cui soluzione può essere posta nella forma:

$$g_i = 2\sigma_i \ln |k_i(t+c)| \quad \sigma_i, k_i, c \text{ costanti.} \quad (5.34)$$

Con:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1$$

tale soluzione è compatibile con le 5.31. Se si sceglie invece $h(t) = \text{costante}$, la corrispondente soluzione delle 5.31 è:

$$g_i = k_i t + c_i \quad k_i, c_i = \text{costante}, \quad (5.35)$$

con:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0;$$

sostituendo le 5.35 nelle equazioni di partenza 5.28 si ricava tuttavia che deve essere:

$$k_i = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

In conclusione, le soluzioni di 5.28 coi dati iniziali 5.29 sono (se $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ii}(t) &= \left| \frac{t}{c} + 1 \right|^{\frac{ca_i}{2}} \quad \text{con: } \sigma_i = \frac{ca_i}{2}, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1, \\ \bar{g}_{ij}(t) &= 0 \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (5.36)$$

oppure, se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$:

$$\bar{g}_{ij}(t) = \delta_{ij} = \text{costante}. \quad (5.37)$$

Va infine ancora osservato che in conseguenza del vincolo 5.28, nella soluzione 5.36 deve aversi in più:

$$(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 = 1.$$

Inserendo la 5.37 nella 5.30 si vede che il modello corrispondente è il \mathcal{V}_4 piatto. Nelle 5.36, invece, almeno una delle tre funzioni \bar{g}_{ii} si annulla al tempo finito $t = -c$, indicando che in tale istante la metrica spaziale diventa singolare. Ciò non è sufficiente a garantire che a $t = -c$ la metrica di \mathcal{V}_4 sia singolare; infatti la superficie π a $t = -c$ potrebbe essere di tipo luce, e in questo caso il vettore $X_4 = \frac{\partial}{\partial t}$ ortogonale a π sarebbe tangente a π stessa, mostrando che la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial t} \right\}$ di \mathcal{V}_4 è degenera in $t = -c$ (cfr. il modello T-NUT-M più avanti). Tuttavia, calcolando lo scalare:

$$S = R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} R^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}$$

a partire dalla metrica 5.30 con le \bar{g}_{ii} date da 5.36 si ottiene (supposto $t > -c$):

$$S(t) = \left(\frac{t}{c} + 1 \right)^{-4} \sum_i \left[\frac{1}{8} a_i^2 - \frac{1}{4} a_i (a_1 + a_2 + a_3) \right]^2$$

e dunque:

$$\lim_{t \rightarrow -c^+} S(t) = +\infty.$$

Ciò mostra che la soluzione 5.36 conduce ad una singolarità effettiva in un tempo finito. Si conclude pertanto che l'unico modello vuoto non singolare spazialmente omogeneo rispetto al gruppo di isometrie G_3 abeliano è il \mathcal{V}_4 piatto.

Il risultato ottenuto può essere esteso al modello di tipo I riempito da un fluido isotropo, e, più in generale ancora, ad ogni modello spazialmente omogeneo con $T_{\mu\nu} = (\mu + p)V_\mu V_\nu + pg_{\mu\nu}$ in cui la velocità V del fluido è ortogonale alle superfici omogenee. In questo caso, infatti, la metrica scritta nella forma 5.1 mostra che $V = -dt$ in rappresentazione covariante; da ciò segue che il tensore di rotazione ω del fluido è nullo, e dunque dall'equazione di Raychaudhuri 2.9 deriva (se $p > -\frac{\mu}{3}$) che il termine di espansione θ del fluido diverge in un tempo finito.

5.4 Diagonalizzazione del modello vuoto di tipo IX generale.

Nel caso delle equazioni del campo gravitazionale nel vuoto:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5.38}$$

si è visto che è sempre possibile trovare soluzioni spazialmente omogenee rispetto all'azione semplicemente transitiva di ciascuno dei nove gruppi tridimensionali di isometrie. In questa sezione si mostrerà in particolare che, *se il \mathcal{V}_4 vuoto è spazialmente omogeneo rispetto al gruppo di isometrie G_3 di tipo IX (isomorfo a $SO(3, \mathbb{R})$), allora è sempre possibile ricondurre la metrica 5.1 alla forma diagonale riferendosi a un'opportuna base invariante; si vedrà inoltre che in tale base le costanti di struttura sono quelle canoniche per $SO(3, \mathbb{R})$, ovvero: $c^i_{jk} = \eta_{ijk}$, dove η_{ijk} è il simbolo di permutazione di Levi-Civita.*

Se \mathcal{V}_4 è spazialmente omogeneo rispetto al gruppo di isometrie di tipo IX, allora nella base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4 = dt\}$ duale di un'opportuna base invariante $\{X_1, X_2, X_3, X_4 = \frac{\partial}{\partial t}\}$ si hanno le relazioni:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\eta_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \quad d\omega^4 = 0 \tag{5.39}$$

e la metrica è (riscrivendo per comodità la 5.1):

$$g = -dt \otimes dt + g_{ij}(t)\omega^i \otimes \omega^j. \tag{5.40}$$

In virtù di noti teoremi sulla diagonalizzazione delle forme quadratiche, è sempre possibile operare una trasformazione di base:

$$\bar{\omega}^i = R^i_j \omega^j, \quad R^i_j = \text{costante} \quad i, j = 1, 2, 3$$

in modo che R^i_j sia una matrice ortogonale:

$$R^i_k R^j_k = \delta^{ij}, \quad \det(R^i_j) = 1 \quad (5.41)$$

e che che all'istante iniziale t_0 la matrice simmetrica $g_{ij}(t_0)$ venga ridotta nella nuova base alla forma diagonale:

$$\bar{g}_{ij}(t_0) = \text{diag}(\bar{g}_{11}(t_0), \bar{g}_{22}(t_0), \bar{g}_{33}(t_0)), \quad (5.42)$$

dove $\bar{g}_{ii}(t_0)$ (non sommato su i) sono gli autovalori positivi di $g_{ij}(t_0)$. In conseguenza di 5.41 e del fatto che R è una matrice costante, nella nuova base è ancora:

$$d\bar{\omega}^i = -\frac{1}{2}\eta_{ijk}\bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^k. \quad (5.43)$$

Riscrivendo le 5.38 nella base $\{\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^3, dt\}$, utilizzando le 5.8, 5.9, 5.10 e le proprietà del simbolo η_{ijk} si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \frac{1}{2}\ddot{\bar{g}}_{ij} + \frac{1}{4}\dot{\bar{g}}_{ij}\dot{\bar{g}}_{ks}\bar{g}^{ks} - \frac{1}{4}\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl}\bar{g}^{mp}\bar{g}^{ts}\eta_{kms}\eta_{ltp} - \frac{1}{2}\dot{\bar{g}}_{is}\dot{\bar{g}}_{jt}\bar{g}^{ts} \\ & + \frac{1}{2}\bar{g}_{tk}\bar{g}^{ms}\eta_{kis}\eta_{tmj} + \delta_{ij} \equiv 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$R_{4i} = -\frac{1}{4}\dot{\bar{g}}_{ks}\bar{g}^{ts}\eta_{kti} \equiv 0, \quad (5.45)$$

$$R_{44} = -\frac{1}{2}\ddot{\bar{g}}_{ij}\bar{g}^{ij} + \frac{1}{4}\dot{\bar{g}}_{is}\dot{\bar{g}}_{jt}\bar{g}^{js}\bar{g}^{it} \equiv 0. \quad (5.46)$$

Si è visto in precedenza che le 5.45 e le 5.46, con $\ddot{\bar{g}}_{ij}(t_0)$ ricavate da 5.44, pongono vincoli sui dati di Cauchy, e non modificano in alcun modo la dinamica successiva del campo, la quale è governata dalle sole 5.44. Dalle 5.45, 5.42 segue all'istante t_0 :

$$\frac{1}{4}(\dot{\bar{g}}_{ij}\bar{g}^{jj} - \dot{\bar{g}}_{ji}\bar{g}^{ii}) = 0 \quad (i \neq j \text{ non sommati});$$

se $\bar{g}^{jj} \neq \bar{g}^{ii}$, allora $\dot{\bar{g}}_{ij} = 0$; se invece $\bar{g}^{jj} = \bar{g}^{ii}$, con un'ulteriore trasformazione ortogonale si può fare in modo che $\dot{\bar{g}}_{ij} = 0$ e che \bar{g} resti diagonale. Si è dunque mostrato che in virtù delle 5.45 si può scegliere una base invariante $\{\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^3, dt\}$ nella quale:

$$d\bar{\omega}^i = -\frac{1}{2}\eta_{ijk}\bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^k$$

e tale che:

$$\bar{g}_{ij}(t_0) = \text{diag}(g_1, g_2, g_3), \quad \dot{\bar{g}}_{ij}(t_0) = \text{diag}(\dot{g}_1, \dot{g}_2, \dot{g}_3). \quad (5.47)$$

Se nella 5.44 si inseriscono le funzioni:

$$\bar{g}_{ij}(t) = 0 = \text{costante} \quad i \neq j, \quad (5.48)$$

$$\bar{g}_{ii}(t) = g_i(t) \quad (\text{non sommato su } i), \quad (5.49)$$

si vede che le equazioni:

$$R_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

sono soddisfatte, mentre per $i = j$ si ha (senza sommare gli indici ripetuti):

$$\begin{aligned} R_{ii} = & \frac{1}{2}\ddot{g}_i + \frac{1}{4}\dot{g}_i \left(\frac{\dot{g}_1}{g_1} + \frac{\dot{g}_2}{g_2} + \frac{\dot{g}_3}{g_3} \right) + \frac{1}{4}g_i^2 \sum_{s,t} \frac{1}{g_s g_t} (\eta_{ist})^2 - \frac{1}{2} \frac{\dot{g}_i^2}{g_i} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{s,t} \frac{g_t}{g_s} (\eta_{its})^2 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Per il teorema di Cauchy-Kowalewski le funzioni 5.48 e 5.49, queste ultime soddisfacenti le 5.50 con le condizioni iniziali date da 5.47, costituiscono l'unica soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie 5.44 con le condizioni iniziali 5.47. Pertanto, la metrica del modello vuoto spazialmente omogeneo di tipo IX generale è sempre riconducibile alla forma:

$$g = -dt^2 + g_1(t) (\omega^1)^2 + g_2(t) (\omega^2)^2 + g_3(t) (\omega^3)^2 \quad (5.51)$$

con:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\eta_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k \quad (5.52)$$

e con le funzioni g_i in 5.51 soddisfacenti il sistema di equazioni differenziali 5.50. I dati iniziali per quest'ultime vanno scelti in modo da soddisfare la 5.46 all'istante t_0 con $\ddot{g}_{ij}(t_0)$ ricavate dalla 5.44.

Introducendo le funzioni $\Omega(t)$, $\beta_+(t)$, $\beta_-(t)$ mediante le sostituzioni:

$$g_1 = e^{-2(\Omega - \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)}, \quad g_2 = e^{-2(\Omega - \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}, \quad g_3 = e^{-2(\Omega + 2\beta_+)}, \quad (5.53)$$

le equazioni 5.46, 5.50 per le componenti non nulle del tensore di Ricci si riscrivono:

$$R_{44} = 3\ddot{\Omega} - 3\dot{\Omega}^2 - 6\dot{\beta}_+^2 - 6\dot{\beta}_-^2 \equiv 0, \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_{11}}{g_1} = & -\ddot{\Omega} + \ddot{\beta}_+ + \sqrt{3}\ddot{\beta}_- + 3\dot{\Omega} \left(\dot{\Omega} - \dot{\beta}_+ - \sqrt{3}\dot{\beta}_- \right) \\ & + \frac{1}{2}e^{2\Omega} \left[e^{4(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} - e^{4(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} - e^{-8\beta_+} \right. \\ & \left. + 2e^{-2(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} \right] \equiv 0, \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_{22}}{g_2} = & -\ddot{\Omega} + \ddot{\beta}_+ - \sqrt{3}\ddot{\beta}_- + 3\dot{\Omega} \left(\dot{\Omega} - \dot{\beta}_+ + \sqrt{3}\dot{\beta}_- \right) \\ & + \frac{1}{2}e^{2\Omega} \left[e^{4(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} - e^{4(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} - e^{-8\beta_+} \right. \\ & \left. + 2e^{-2(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} \right] \equiv 0, \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_{11}}{g_1} = & -\ddot{\Omega} - 2\ddot{\beta}_+ + 3\dot{\Omega} \left(\dot{\Omega} + 2\dot{\beta}_+ \right) + \frac{1}{2}e^{2\Omega} \left[e^{-8\beta_+} \right. \\ & \left. - e^{4(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} - e^{4(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} + e^{4\beta_+} \right] \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Dalla 5.54 si ricava:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{\Omega}} \right) = -1 - 2 \left(\frac{\dot{\beta}_+}{\dot{\Omega}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\dot{\beta}_-}{\dot{\Omega}} \right)^2 \leq 1.$$

Ciò prova che la funzione: $f(t) = \frac{1}{\dot{\Omega}} + t$ è monotona non crescente; pertanto la funzione $f(t) - t$ è strettamente decrescente, ha uno zero a un tempo finito t_1 (in quanto il grafico di $y = f(t)$ interseca necessariamente la retta $y = t$). La sua reciproca è quindi strettamente crescente e diverge in t_1 . Si ha dunque, per $t_0 < t < t_1$:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}(t) &= \frac{1}{f(t) - t} \implies \Omega(t) = \int_{t_0}^t \frac{d\xi}{f(\xi) - \xi} + \text{costante} \\ &= \int_{t_0}^t \frac{d\xi}{f(\xi) - f(t_1) + f(t_1) - \xi} + \text{costante} \\ &> \int_{t_0}^t \frac{d\xi}{f(t_1) - \xi} + \text{costante} = \ln \frac{t_0 - f(t_1)}{t - f(t_1)} + \text{costante} \xrightarrow{t \rightarrow t_1^-} +\infty. \end{aligned}$$

Quindi: $\lim_{t \rightarrow t_1^-} \Omega(t) = +\infty$. In modo analogo si prova che: $\lim_{t \rightarrow t_1^+} \Omega(t) = +\infty$.

La funzione $\Omega(t)$ è legata al determinante della metrica spaziale indotta dalla 5.51 sulle superfici a $t = \text{costante}$ da:

$$\det(g_{ij}) = g_1 g_2 g_3 = e^{-6\Omega}.$$

Si conclude quindi che la metrica spaziale tende in t_1 ad una metrica singolare, o in altre parole si ha: $g_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_1} 0$ per almeno un indice $i \in \{1, 2, 3\}$.

Come già notato nel precedente paragrafo, ciò non è sufficiente tuttavia a concludere che \mathcal{V}_4 sia singolare in t_1 ; ricordando infatti la costruzione descritta in §1.4 per ottenere una base invariante di \mathcal{V}_4 in cui la metrica fosse espressa da 5.1, va osservato che la base invariante $\{X_1, X_2, X_3, X_4 = \frac{\partial}{\partial t}\}$ duale di $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4 = dt\}$ veniva colà ottenuta a partire da una curva $\gamma = \gamma(t)$ secante le superfici omogenee di tipo spazio e a esse ortogonale, estendendo poi mediante l'azione del gruppo una terna di vettori indipendenti $\{X_1, X_2, X_3\}$ tangenti in ogni punto di γ alla superficie omogenea passante per quel punto. Tale costruzione è possibile finchè il fogliettamento di \mathcal{V}_4 indotto dall'azione del gruppo G_3 di isometrie è costituito da superfici omogenee di tipo spazio. Tuttavia la curva γ non può essere prolungata attraverso un'eventuale superficie omogenea π di tipo luce, indicando così che la base in cui è espressa la 5.1 è degenerare in π . Poichè inoltre il problema di Cauchy per le equazioni del campo gravitazionale è mal posto su una superficie di tipo luce, nulla garantisce che, ove possibile, il prolungamento della 5.1 ad una metrica definita in un intorno di π sia univoco. Un esempio che chiarifica quanto detto è il modello T-NUT-M descritto nel paragrafo seguente.

5.5 Il modello T-NUT-M.

La metrica 5.51 per il modello vuoto spazialmente omogeneo di tipo IX generale è riferita alla base invariante anolonoma $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt\}$ definita da 5.52. Introdotto un opportuno sistema di coordinate locali (coordinate di Eulero): $\{\theta, \varphi, \psi \mid (\theta, \varphi, \psi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 4\pi)\}$ per le superfici omogenee a $t = \text{costante}$ ¹, le $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ possono risciversi:

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \sin \psi d\theta - \sin \theta \cos \psi d\varphi, \\ \omega^2 &= \cos \psi d\theta + \sin \theta \sin \psi d\varphi, \\ \omega^3 &= \cos \theta d\varphi + d\psi.\end{aligned}\tag{5.58}$$

A queste corrispondono sulle superfici omogenee i campi invarianti:

$$\begin{aligned}X_1 &= \sin \psi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cot \theta \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ X_2 &= \cos \psi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cot \theta \sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial \psi}.\end{aligned}\tag{5.59}$$

Se nella 5.51 si pone: $g_1 = g_2 = g_3 := g$ (ovvero: $\beta_+ = \beta_- = 0$), si verifica agevolmente che si riottiene la metrica FRW con curvatura delle superfici spaziali positiva.

Se si pone invece: $g_1 = g_2 \neq g_3$ (ovvero: $\beta_- = 0, \beta_+ \neq 0$), si può ricavare la soluzione esplicita del sistema di equazioni differenziali 5.54, 5.55, 5.56, 5.57; con un'opportuna sostituzione della variabile t si trova che la metrica corrispondente a tale soluzione è:

$$g = -\frac{dt^2}{U(t)} + (2l)^2 U(t) (\omega^3)^2 + (t^2 + l^2) [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2],\tag{5.60}$$

con:

$$U(t) = -1 + 2\frac{mt + l^2}{t^2 + l^2}, \quad m, l > 0.\tag{5.61}$$

La metrica 5.60 (ricavata da Taub nel 1951, cfr. [17]) è definita per $t \in I = (t_-, t_+)$, con: $t_{\pm} = m \pm (m^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}$, ed è singolare agli estremi t_+ e t_- , nei quali U si annulla.

¹Tali superfici sono isomorfe (almeno localmente) a 3-sfere S^3 e le coordinate di Eulero sono coordinate sferiche in S^3 ; S^3 si identifica coll'unico gruppo tridimensionale semplicemente connesso avente algebra di Lie di tipo IX. Le coordinate di Eulero per il gruppo delle rotazioni $SO(3, \mathbb{R})$ (anch'esso di tipo IX) hanno $\psi \in (0, 2\pi)$; $SO(3, \mathbb{R})$ non è tuttavia semplicemente connesso. Nel caso in esame si ha: $\mathcal{V}_4 \cong I \times S^3$, essendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto.

L'espressione 5.60 può essere semplificata pensando $\mathcal{V}_4 \cong I \times S^3$ come un fibrato sulla sfera S^2 , essendo $I \times S^1$ la fibra in ogni punto di S^2 ; la fibrazione può essere descritta nelle coordinate $\{t, \theta, \varphi, \psi\}$ introdotte sopra mediante la proiezione:

$$\begin{aligned} \pi : \quad I \times S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (t, \theta, \varphi, \psi) &\rightsquigarrow (\theta, \varphi) \end{aligned}$$

L'azione del gruppo di isometrie G_3 di tipo IX mappa fibre in fibre (come segue dal fatto che $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial \psi}$ sono campi invarianti rispetto a G_3), la qual cosa mostra che tutte le fibre con la metrica indotta su ciascuna da $I \times S^3$ sono fra loro isometriche. L'applicazione π definisce univocamente in ogni punto $x \in I \times S^3$ un sottospazio (verticale) dello spazio tangente: $V_x = \ker \pi_* = L \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right)_x \right) \subset T_x(I \times S^3)$; l'assegnazione della metrica 5.60 permette di completare V_x con il sottospazio (orizzontale): $H_x = V_x^\perp = L \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \right)_x \right)$ in modo che: $T_x(I \times S^3) = V_x \oplus H_x$. Corrispondentemente, ogni vettore $X \in T_x(I \times S^3)$ si decompone in modo univoco nella somma di una parte $X_H \in H_x$ e di una parte $X_V \in V_x$: $X = X_H + X_V$; infine, la metrica 5.60 si riscrive:

$$g(X, Y) = g_V(X_V, Y_V) + (t^2 + l^2) g_H(\pi_* X_H, \pi_* Y_H), \quad (5.62)$$

essendo g_H la metrica della sfera S^2 immersa in \mathbb{R}^3 euclideo ($g_H = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{(1 + \frac{r^2}{4})^2}$, cfr. §3.1), mentre g_V è la metrica indotta da g su una qualsiasi fibra, data da:

$$g_V = -\frac{dt^2}{U(t)} + (2l)^2 U(t) d\psi^2. \quad (5.63)$$

Dei due termini che compaiono nella somma 5.62, solo g_V è singolare in $t = t_\pm$; tale singolarità è tuttavia soltanto apparente, essendo legata alla scelta del sistema di coordinate in cui è espressa la 5.63. Prima di mostrare nel dettaglio quanto appena affermato, è opportuno soffermarsi brevemente su un esempio più semplice (descritto da Misner in [18]), che presenta caratteristiche analoghe a quelle del caso in esame.

Nel cilindro $M_+ = (0, +\infty) \times S^{12}$ si può definire la metrica iperbolica:

$$h = -\frac{dt^2}{t} + td\psi^2, \quad (t, \psi) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \quad (5.64)$$

(nelle coordinate $\{t, \psi\}$ si identifica $\psi = 2\pi$ con $\psi = 0$). h è singolare in $t = 0$; tuttavia, introducendo la nuova coordinata:

$$\psi' = \psi - \ln t, \quad (5.65)$$

²Al contrario di $I \times S^3$, $I \times S^1$ non è semplicemente connesso.

la 5.64 diventa:

$$h' = d\psi' \otimes dt + dt \otimes d\psi' + t (d\psi')^2. \quad (5.66)$$

La metrica 5.66 è definita in tutto il cilindro $M = \mathbb{R} \times S^1$ riferito a coordinate $\{t, \psi'\}$, è analitica e prolunga la metrica 5.64, poichè coincide con essa in $M_+ \subset M^3$. (M, h') non è però l'unico modo in cui la 5.64 può essere estesa nella porzione inferiore del cilindro; sostituendo infatti:

$$\psi'' = \psi + \ln t, \quad (5.67)$$

la 5.64 si riscrive:

$$h'' = - (d\psi'' \otimes dt + dt \otimes d\psi'') + t (d\psi'')^2. \quad (5.68)$$

h'' è un'altra metrica analitica che prolunga la 5.64 all'intero M , tuttavia essa non è isometrica alla 5.66. Per convincersene è sufficiente osservare che, dato un qualsiasi punto $x_0 \in M_+$, delle due geodetiche γ_1, γ_2 di tipo luce uscenti da x_0 una sola si estende nella parte inferiore di M , in modo alterno alla scelta di una delle due metriche h' o h'' per M . Infatti, in (M, h') le due geodetiche sono definite in forma implicita da:

$$\gamma_1 : 2 \ln \left(\frac{t_{\gamma_1}}{t_0} \right) = - (\psi'_{\gamma_1} - \psi'_0), \quad (5.69)$$

$$\gamma_2 : \psi'_{\gamma_2} = \psi'_0 = \text{costante}; \quad (5.70)$$

si vede che delle due solo γ_2 si prolunga in M_- , mentre γ_1 si avvolge a spirale attorno al cilindro appiattendosi sulla circonferenza a $t = 0$. Ricordando le 5.65, 5.67, si può sostituire: $\psi' = \psi'' - 2 \ln t$ nelle 5.69, 5.70; si verifica in questo modo che in (M, h'') le caratteristiche delle due geodetiche si invertono (fig. 5.1).

Tornando ora alla metrica 5.62 del modello di Taub, operando sulla fibra $(t_-, t_+) \times S^1$ il cambiamento di coordinate:

$$\psi' = \psi + \frac{1}{2l} \int \frac{dt}{U(t)}, \quad (5.71)$$

la parte g_V di g singolare in t_{\pm} separata in 5.63 si prolunga da $(t_-, t_+) \times S^1$ all'intero cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ nel modo che segue:

$$g'_V = -2l (d\psi' \otimes dt + dt \otimes d\psi') + 4l^2 U(t) (d\psi')^2. \quad (5.72)$$

³La metrica 5.66 (come pure la metrica 5.68 definita più avanti) è piatta; ciò si può verificare sostituendo: $\xi = te^{\frac{\psi'}{2}} - e^{-\frac{\psi'}{2}}$, $\eta = te^{\frac{\psi'}{2}} + e^{-\frac{\psi'}{2}}$ e osservando che in tali coordinate si ha: $h' = d\xi^2 - d\eta^2$.

Inoltre, in $M_- = (-\infty, 0) \times S^1$ con metrica h' non è possibile definire una nozione globale di ordinamento temporale, in quanto le curve a $t = \text{costante} < 0$ sono chiuse e di tipo tempo.

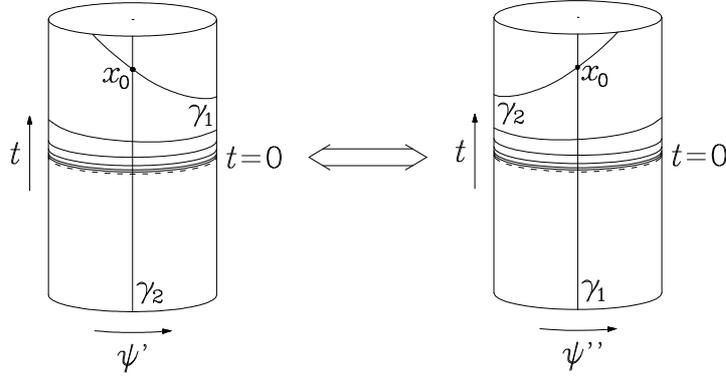


Figura 5.1: Andamento di due geodetiche di tipo luce γ_1, γ_2 rispettivamente in (M, h') , (M, h'') ; si vede il comportamento speculare delle due metriche, che indica che h', h'' sono due prolungamenti inequivalenti di (M_+, h) .

g'_V è analitica e, ricordando la definizione 5.61 della funzione U , si vede che la metrica g' di \mathcal{V}_4 ottenuta da g'_V è tale che esistono due superfici omogenee di tipo luce a $t = t_-$ e a $t = t_+$ che separano $\mathcal{V}_4 \cong \mathbb{R} \times S^3$ in tre regioni distinte (nell'esempio precedente le regioni diverse erano due); di queste, l'interna corrisponde al modello di Taub già esaminato, nel quale le superfici omogenee sono di tipo spazio, mentre le due porzioni con $t < t_-$ e con $t > t_+$ (descritte per la prima volta e in un contesto diverso da Newman, Tamburino e Unti nel 1963, cfr. [19]) hanno per sottovarietà omogenee superfici di tipo tempo; la regione di Taub (T) ha un ordinamento temporale globale, mentre nelle due regioni di Newman, Tamburino e Unti (NUT) esistono curve chiuse di tipo tempo. La metrica 5.63 può essere estesa all'intero $\mathbb{R} \times S^1$ in un altro modo inequivalente a quanto appena visto; definendo infatti:

$$\psi'' = \psi - \frac{1}{2l} \int \frac{dt}{U(t)}, \quad (5.73)$$

la varietà $((t_-, t_+) \times S^1, g_V)$ si prolunga a $(\mathbb{R} \times S^1, g''_V)$ con:

$$g''_V = 2l (d\psi'' \otimes dt + dt \otimes d\psi'') + 4l^2 U(t) (d\psi'')^2. \quad (5.74)$$

La metrica g'' di \mathcal{V}_4 ottenuta da g''_V ha le stesse caratteristiche di g' , tuttavia g' e g'' non sono isometriche. Questo si mostra in modo simile a quanto visto nell'esempio; si verifica cioè che nella regione T le geodetiche di tipo tempo o di tipo luce uscenti da un punto qualunque si suddividono in due famiglie, delle quali una può essere prolungata sia in $t < t_-$ sia in $t > t_+$ e l'altra nè in $t < t_-$ nè in $t > t_+$, e si osserva che la scelta di estendere g con la 5.72 o con la 5.74 scambia tra loro le due famiglie. I dettagli della questione sono l'argomento del prossimo paragrafo.

5.6 Le geodetiche nel modello T-NUT-M.

Esaminando più estesamente le caratteristiche delle geodetiche nel modello T-NUT-M⁴, è utile osservare che, data una geodetica γ parametrizzata in modo affine, detto V il corrispondente vettore tangente, e dato un campo di Killing ξ arbitrario, in tutta generalità il prodotto scalare (ξ, V) è costante lungo γ ; infatti, dalle equazioni di Killing: $\xi_{\mu||\nu} + \xi_{\nu||\mu} = 0$ segue:

$$\nabla_V (\xi, V) = (\nabla_V \xi, V) = \xi_{\mu||\nu} V^\mu V^\nu = 0.$$

Nel modello di Taub sono ovviamente definiti i tre campi di Killing generati dall'azione del gruppo G_3 di tipo IX:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \xi_2 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ \xi_3 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (5.75)$$

(i campi ξ_i sono tali che: $[\xi_i, \xi_j] = -\eta_{kij} \xi_k$, e, se X_j è un elemento della base invariante 5.59 dello spazio tangente alle superfici omogenee, si ha: $[\xi_i, X_j] = 0$). In più, in conseguenza dell'ulteriore simmetria: $g_1 = g_2$, si può verificare che esiste sulle superfici omogenee un quarto campo di Killing indipendente dai precedenti, espresso in componenti da:

$$\eta = \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (5.76)$$

Per il seguito è utile osservare che, su ciascuna superficie omogenea a $t =$ costante, i vettori di Killing $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ sono legati alla base invariante $\{X_1, X_2, X_3\}$ data in 5.59 da una matrice ortogonale dipendente dal punto:

$$(\xi_i)_{x(t, \theta, \varphi, \psi)} = R^j_i(\theta, \varphi, \psi) (X_j)_{x(t, \theta, \varphi, \psi)} \quad \text{con:} \quad (R^i_k R^j_k)(\theta, \varphi, \psi) = \delta^{ij};$$

ciò si può verificare osservando che $\{X_1, X_2, X_3\}$ e $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ sono entrambe basi ortonormali per S^3 con metrica: $h = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2$.

Se si considera l'estensione del modello di Taub al modello T-NUT-M con il cambiamento di coordinate 5.71, la metrica è data da:

$$\begin{aligned} g' &= -4l (d\psi' + \cos \theta d\varphi) dt + (2l)^2 U(t) (d\psi' + \cos \theta d\varphi)^2 \\ &\quad + (t^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ &= -2l (\omega'^3 \otimes dt + dt \otimes \omega'^3) + (2l)^2 U(t) (\omega'^3)^2 \\ &\quad + (t^2 + l^2) \left[(\omega'^1)^2 + (\omega'^2)^2 \right], \end{aligned}$$

⁴L'ultima lettera dell'acronimo T-NUT-M è l'iniziale di Misner, che con Taub mostrò nel 1969 il legame fra i modelli T e NUT (cfr. [20]).

dove le ω'^i si scrivono nella stessa forma delle 5.58 pur di scambiare ψ con ψ' , e soddisfano quindi anch'esse le relazioni: $d\omega'^i = -\frac{1}{2}\eta_{ijk}\omega'^j \wedge \omega'^k$. I campi di Killing nelle nuove coordinate sono ovviamente gli stessi di prima, e si ottengono dalle 5.75, 5.76 scambiando ψ con ψ' ; la base invariante duale delle ω'^i sulle superfici omogenee è data da tre nuovi campi $\{X_1, X_2, X_3\}$ non coincidenti con gli 5.59, ma espressi formalmente al medesimo modo dei 5.59 stessi con la sostituzione: $\psi \leftrightarrow \psi'$ (in sostanza, il passaggio dalle coordinate $\{t, \theta, \varphi, \psi\}$ alle coordinate $\{t, \theta, \varphi, \psi'\}$ cambia la base invariante ottenuta con la costruzione descritta in §1.4, che non è canonica, poichè dipende dalla scelta di una curva secante le superfici omogenee e di una terna di vettori tangenti a tali superfici mobile lungo la curva stessa).

Si consideri nel sistema di coordinate $\{t, \theta, \varphi, \psi'\}$ una geodetica $\gamma = \gamma(\tau)$ parametrizzata in modo affine, avente $V = V^i X'_i + V^4 \frac{\partial}{\partial t}$ per vettore tangente e con: $(V, V) = E \in \{-1, 0, 1\}$. Si ha:

$$p_{\parallel} := (\eta, V) = (X'_3, V) = -2lV^4 + (2l)^2 U(t) V^3 = \text{costante},$$

$$p_i := (\xi_i, V) = \text{costante} \implies p^2 := \sum_{i=1}^3 (p_i)^2 = \text{costante}.$$

Poichè si è visto che i vettori ξ_i sono legati in ogni punto agli X'_i da una matrice ortogonale, segue:

$$\sum_i (X'_i, V) \equiv p^2 = \text{costante} = (t^2 + l^2) \left[(V^1)^2 + (V^2)^2 \right] + p_{\parallel}^2$$

$$\implies p_{\perp}^2 := p^2 - p_{\parallel}^2 = (t^2 + l^2) \left[(V^1)^2 + (V^2)^2 \right] = \text{costante} \quad .$$

Si ha poi ancora:

$$E = (V, V) = -4lV^4V^3 + (2l)^2 U(t) (V^3)^2 + (t^2 + l^2) \left[(V^1)^2 + (V^2)^2 \right] =$$

$$= \frac{p_{\parallel}^2 - (2l)^2 (V^4)^2}{(2l)^2 U(t)} + \frac{p_{\perp}^2}{t^2 + l^2}.$$

Ricordando che è: $V^4 = \frac{dt_{\gamma}}{d\tau}$, si sono dunque trovate le due seguenti equazioni per le componenti V^3 e V^4 :

$$\frac{p_{\parallel}^2}{(2l)^2} = \left(\frac{dt_{\gamma}}{d\tau} \right)^2 - \frac{U(t_{\gamma})}{t_{\gamma}^2 + l^2} p_{\perp}^2 + EU(t_{\gamma}), \quad (5.77)$$

$$V^3 = \frac{1}{(2l)^2 U(t_{\gamma})} \left[p_{\parallel} \pm 2l \sqrt{\frac{p_{\parallel}^2}{(2l)^2} + \frac{U(t_{\gamma})}{t_{\gamma}^2 + l^2} p_{\perp}^2 - EU(t_{\gamma})} \right]. \quad (5.78)$$

Nella 5.78 il segno è concorde con quello di $\frac{dt_{\gamma}}{d\tau}$.

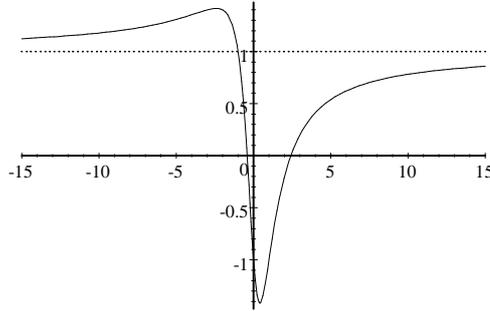


Figura 5.2: Andamento del potenziale geodetico $V(t)$ per una geodetica con $E = -1$, $p_{\perp} = 0$ nella metrica T-NUT-M con $m = l = 1$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse a $t = t_{-}$ e a $t = t_{+}$ corrispondono alle due superfici di tipo luce che separano le due regioni NUT esterne dalla regione T interna.

La 5.77 è del tutto simile all'equazione del moto classica di una particella, nella quale a τ corrisponde il tempo, a t_{γ} la posizione, a $\frac{p_{\parallel}^2}{(2l)^2} = \text{costante}$ l'energia totale e il potenziale è dato da:

$$V(t) = U(t) \left(E - \frac{p_{\perp}^2}{t_{\gamma}^2 + l^2} \right).$$

Se per esempio si pone $m = l = 1$ nella 5.61, per una geodetica di tipo tempo ($E = -1$) con $p_{\perp} = 0$ il potenziale ha la forma di una buca (fig. 5.2). Ciò sembrerebbe mostrare che per $\frac{p_{\parallel}^2}{(2l)^2} < 1$ il valore della coordinata t_{γ} oscilla dall'una all'altra regione NUT passando per la regione T, ma questo in realtà non avviene. Infatti, l'equazione 5.78, presa col segno + o - a seconda che sia $p_{\parallel} > 0$ o $p_{\parallel} < 0$, mostra che V^3 diverge in t_{\pm} ; dunque la geodetica γ non può in alcun modo transitare attraverso le due superfici omogenee di tipo luce separatrici; da questo segue che γ ha lunghezza finita ed è inestensibile (fig. 5.3.a). Se il segno della 5.78 è preso nel modo opposto, allora γ passa attraverso le due superfici, ma nel moto di ritorno il segno si alterna e V^3 diverge, riconducendosi alla situazione appena descritta (fig. 5.3.b). Se invece si sceglie $\frac{p_{\parallel}^2}{(2l)^2} > 1$, a seconda che il segno di $\frac{dt_{\gamma}}{d\tau}$ all'istante iniziale sia concorde o discorde col segno di p_{\parallel} , la geodetica non può attraversare alcuna delle superfici di tipo luce (fig. 5.3.c) oppure γ si estende da $t = -\infty$ a $t = +\infty$ passando una sola volta attraverso ciascuna delle tre regioni (fig. 5.3.d). I casi appena descritti (nei quali il moto si compie su una superficie a $(\theta, \varphi) = \text{costante}$) sono riassunti nell'ordine in fig. 5.3.

È opportuno infine osservare che, se si fosse scelto di estendere la regione T per mezzo della 5.73 anzichè con la 5.71, il segno \pm nella 5.78 sarebbe stato invertito e si sarebbero ottenute situazioni esattamente opposte a quelle descritte sopra.

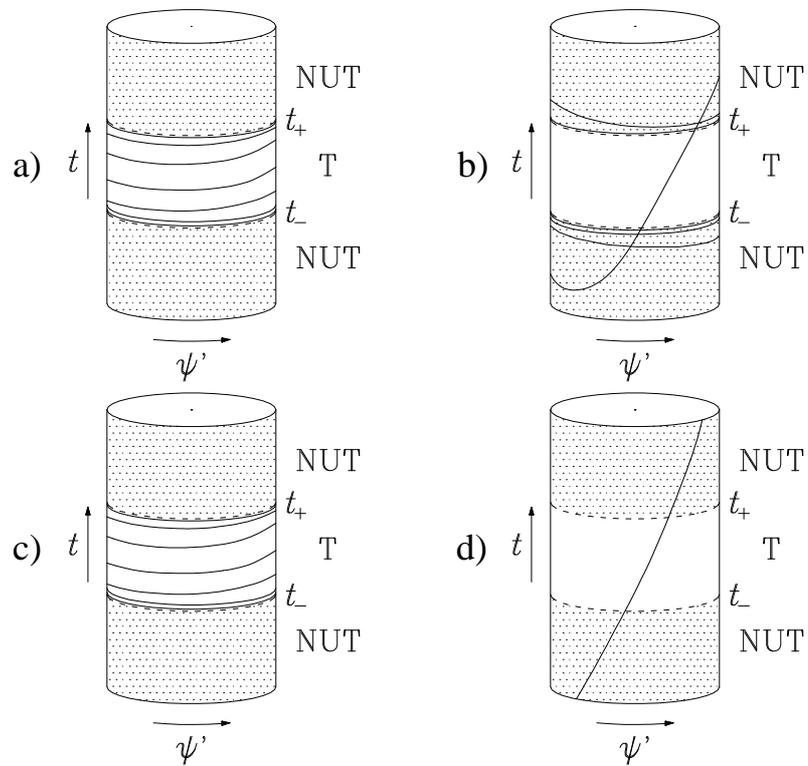


Figura 5.3: Le geodetiche di tipo tempo nel modello T-NUT-M ricavate dal potenziale in fig. 5.2. Il moto si compie su una fibra $\mathbb{R} \times S^1$.

Appendice A

In questa sezione si dimostrerà l'implicazione inversa del teorema 1.1.6, ovvero si proverà che gruppi di Lie con algebre di Lie isomorfe sono isomorfi in un intorno dell'identità.

Nel seguito, per chiarezza notazionale, non si userà la convenzione di somma sugli indici ripetuti. Nelle formule gli indici saranno tutti scritti in basso, mentre la posizione in alto sarà riservata ai soli esponenti. Si supporrà inoltre che G sia una varietà analitica.

Si indicherà con $D(G)$ l'algebra degli operatori da $\mathcal{F}(G)$ in $\mathcal{F}(G)$ generata da tutti i campi left-invarianti e dall'operatore identità; in tale algebra, l'operazione di composizione fra due operatori $X, Y \in D(G)$ è definita dal requisito che per ogni $f \in \mathcal{F}(G)$ si abbia $(XY)f = X(Y(f))$. Se i campi $\{X_1 \dots X_n\}$ formano una base (d'ora in poi supposta fissata) per l'algebra di Lie \mathfrak{g} del gruppo n -dimensionale G , un insieme di generatori di $D(G)$ è costituito dall'identità e dagli operatori $X_{i_1} \dots X_{i_p}$ ($1 \leq i_r \leq n$, $p > 0$), ottenuti componendo fra loro i campi $\{X_1 \dots X_n\}$ stessi (considerati come operatori su $\mathcal{F}(G)$). Data l' n -upla $t = (t_1 \dots t_n) \in \mathbb{R}^n$, si porrà: $X(t) = \sum_{i=1}^n t_i X_i$. Detta $M = (m_1 \dots m_n)$ una n -upla ordinata di interi, con $m_i \geq 0$, si porrà inoltre $|M| = m_1 + \dots + m_n$ e $t^M = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$; se $|M| > 0$, si indicherà con $X(M)$ il coefficiente di t^M nell'espansione dell'operatore $\frac{X(t)^{|M|}}{|M|!}$, mentre se $|M| = 0$ si porrà $X(M) = \text{id}$. Per come sono definiti, gli operatori $X(M)$ stessi sono elementi di $D(G)$.

Lemma A.0.1 *Ogni operatore $X_{i_1} \dots X_{i_p}$, con $1 \leq i_r \leq n$, può essere espresso come combinazione lineare finita:*

$$X_{i_1} \dots X_{i_p} = \sum_{|M| \leq p} a_M X(M), \quad (\text{A.1})$$

con $a_M \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Posto: $u_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} X_{i_{\sigma(1)}} \dots X_{i_{\sigma(p)}}$ (S_p è l'insieme delle permutazioni dei p elementi $\{1 \dots p\}$), si ha chiaramente: $u_p = cX(M)$, dove $c \in \mathbb{R}$ e M è un'opportuna n -upla. Usando le relazioni di commutazione: $X_i X_j - X_j X_i = \sum_k c^k_{ij} X_k$, si trova che $X_{i_1} \dots X_{i_p} - X_{i_{\sigma(1)}} \dots X_{i_{\sigma(p)}}$ è

una combinazione lineare a coefficienti reali e costanti di elementi della forma $X_{j_1} \dots X_{j_{p-1}}$ con $1 \leq j_r \leq n$. La A.1 segue dunque per induzione su p . ■

Per un generico campo left-invariante X e per una qualunque funzione $f \in \mathcal{F}(G)$ sussiste la relazione:

$$(Xf)(g) = (X(f \circ L_g))(e) = \left. \frac{d}{dt} f(g \exp(tX_e)) \right|_{t=0},$$

e dunque:

$$(Xf)(g \exp(uX_e)) = \frac{d}{du} f(g \exp(uX_e)),$$

dalla quale per induzione:

$$(X^n f)(g \exp(uX)) = \frac{d^n}{du^n} f(g \exp(uX)) \quad (\text{A.2})$$

(nella A.2 e nelle espressioni seguenti si è ommesso per semplicità notazionale di indicare, ove evidente dal contesto, l'indice e dei campi valutati nell'identità). Se Y è un secondo campo left-invariante, usando due volte la A.2 si trova:

$$(Y^m X^n f)(e) = \left. \frac{d^m}{ds^m} \frac{d^n}{du^n} f(\exp(sY) \exp(uX)) \right|_{s=t=0}. \quad (\text{A.3})$$

Da A.2 e A.3 seguono rispettivamente gli sviluppi in serie:

$$f(g \exp X(t)) = \sum_M t^M [X(M)f](g), \quad (\text{A.4})$$

$$f(\exp(tX) \exp(sY)) = \sum_{m,n \geq 0} \frac{t^n s^m}{n! m!} (X^n Y^m f)(e). \quad (\text{A.5})$$

Confrontando la A.4 coll'ordinario sviluppo in serie di Taylor per la funzione $F(t_1 \dots t_n) = f(g \exp X(t))$, si trova:

$$[X(M)f](g) = \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \left[\frac{\partial^{|M|}}{\partial t_1^{m_1} \dots \partial t_n^{m_n}} f(g \exp X(t)) \right]_{t_1=\dots=t_n=0}. \quad (\text{A.6})$$

Dalla A.6 segue che gli operatori $X(M)$ sono linearmente indipendenti; in virtù del lemma A.0.1 segue dunque che, al variare di M , gli $X(M)$ formano una base di $D(G)$. Si ha pertanto:

$$X(M)X(N) = \sum_{|P| \leq |M|+|N|} C^P_{MN} X(P), \quad (\text{A.7})$$

essendo le costanti C^P_{MN} univocamente determinate. Una base di $D(G)$ alternativa agli $X(M)$ è data dagli operatori $X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ con $e_i \geq 0$. Infatti,

poichè $X_i X_j - X_j X_i = \sum_k c^k_{ij} X_k$, è chiaro che ogni $X(M)$ può essere scritto come combinazione lineare a coefficienti costanti di elementi $X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ con $e_1 + \dots + e_n \leq |M|$; di converso, da A.1 segue che ogni $X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ può essere scritto come combinazione lineare a coefficienti costanti di operatori $X(M)$ con $|M| \leq e_1 + \dots + e_n$. Poichè il numero di elementi $X(M)$ con $|M| \leq e_1 + \dots + e_n$ è pari al numero di elementi $X_1^{f_1} \dots X_n^{f_n}$ con $f_1 + \dots + f_n \leq e_1 + \dots + e_n$, segue che anche gli operatori $X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ costituiscono, al variare degli e_i , una base per $D(G)$; in tale base si ha:

$$X(M) = \sum_{e_1 + \dots + e_n \leq |M|} b_{e_1 \dots e_n} X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}, \quad (\text{A.8})$$

essendo i coefficienti (costanti) $b_{e_1 \dots e_n}$ determinati dall'algebra di Lie di G . Pure nella decomposizione:

$$X(M) X(N) = \sum_{e_1 + \dots + e_n \leq |M| + |N|} c_{e_1 \dots e_n} X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$$

i coefficienti $c_{e_1 \dots e_n}$ sono determinati dall'algebra di Lie di G , come segue dalla A.8 e ancora dalle regole di commutazione $X_i X_j - X_j X_i = \sum_k c^k_{ij} X_k$. Pertanto, nella A.7 le costanti C^P_{MN} sono determinate dall'algebra di Lie di G .

Per mostrare che gruppi di Lie aventi algebre di Lie isomorfe sono isomorfi in un intorno dell'identità, basta ora riferire un generico gruppo di Lie G a coordinate normali $\{x_1 \dots x_n\}$ in un intorno aperto U_e di $e \in G$. Se $x, y, xy \in U_e$, si ha:

$$\begin{aligned} x &= \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n), & y &= \exp(y_1 X_1 + \dots + y_n X_n), \\ xy &= \exp((xy)_1 X_1 + \dots + (xy)_n X_n). \end{aligned}$$

Usando la A.5 sulla funzione $f : x \rightsquigarrow x_k$ si trova:

$$(xy)_k = \sum_{M, N} x^M y^N [X(M) X(N) x_k](e),$$

che, ricordando la A.7, diventa:

$$(xy)_k = \sum_{M, N, P} x^M y^N C^P_{MN} [X(P) x_k](e). \quad (\text{A.9})$$

Dalla A.6 si ricava:

$$[X(P) x_k](e) = \begin{cases} 1 & \text{se } P = (\delta_{k1} \dots \delta_{kn}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

quindi, posto: $[k] = (\delta_{k1} \dots \delta_{kn})$, la A.9 si riscrive:

$$(xy)_k = \sum_{M, N} C^{[k]}_{MN} x^M y^N.$$

Poichè le $C^{[k]}_{MN}$ sono assegnate dall'algebra di Lie di G , quest'ultima formula mostra che la legge di composizione del gruppo è determinata in U_e dall'algebra di Lie di G stessa, e dunque la tesi è provata.

Appendice B

In questa sezione si otterrà l'equazione della deviazione geodetica, che verrà poi usata per ricavare un'utile espansione in serie delle componenti del tensore metrico; si mostrerà che in una varietà simmetrica (cioè nella quale $\nabla R = 0$) tale espansione si riduce alla formula 3.7.

Sia M una varietà riemanniana, sia $x_0 \in M$, e siano $\{\dot{x}^1 \dots \dot{x}^n\}$ le coordinate naturali in $T_{x_0}(M)$ riferito ad una base $\{X_1 \dots X_n\}$. In coordinate normali il map-esponenziale assume la forma: $x^i(\exp_{x_0}(v)) = \dot{x}^i(v)$. Sia $D = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ il **campo delle dilatazioni** in $T_{x_0}(M)$; si indichi con $U := (\exp_{x_0})_* D = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ il suo push-forward. Allora:

1. Le linee integrali di D sono le semirette uscenti dall'origine:

$$\frac{d\dot{x}^i}{d\xi} = \dot{x}^i \implies \dot{x}^i(\xi) = v^i e^\xi.$$

Tramite il map-esponenziale, queste sono convertite nelle curve: $x^i(\xi) = v^i e^\xi$. Queste ultime sono geodetiche, parametrizzate in maniera non affine; un parametro affine sarebbe: $\tau = e^\xi$. Il vettore tangente a tali curve vale: $v^i e^\xi \frac{\partial}{\partial x^i} = U = e^\xi \frac{dx^i}{d\tau} \implies U = e^\xi \partial_\tau \implies \nabla_U U = \nabla_U (e^\xi \partial_\tau) = e^\xi (\partial_\tau + \nabla_U \partial_\tau) = e^\xi \partial_\tau = U$ (con ∂_τ si è indicato il vettore tangente alle curve parametrizzate col parametro affine τ).

2. I campi $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ in $T_{x_0}(M)$ soddisfano: $[\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}, D] = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \implies$ i campi $\frac{\partial}{\partial x^i}$ in M soddisfano: $[\frac{\partial}{\partial x^i}, U] = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Pertanto rispetto alla connessione riemanniana:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} U - \nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, U \right] = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

3. Si ha:

$$\begin{aligned}
\nabla_U \nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i} &= \nabla_U \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} U - \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_U - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial x^i}, U]} + R \left(U, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) U - \nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= R \left(U, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) U - \nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Esplicitando i termini che compaiono nell'ultima espressione si trova:

$$\begin{aligned}
\nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i} &= x^p \Gamma_{pi}{}^k \frac{\partial}{\partial x^k} := Y_i{}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \\
\nabla_U \nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i} &= U \left(Y_i{}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} + Y_i{}^r Y_r{}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Lungo le linee integrali di U :

$$\begin{aligned}
Y_i{}^k &= \Gamma_{pi}{}^k \left(v^1 e^\xi \dots v^n e^\xi \right) v^p e^\xi := X_i{}^k e^\xi, \\
U \left(Y_i{}^k \right) &= \frac{dY_i{}^k}{d\xi} = X_i{}^k e^\xi + e^\xi \frac{dX_i{}^k}{d\xi}.
\end{aligned}$$

In conclusione, si è trovata l'equazione:

$$e^\xi \left(X_i{}^k + \frac{dX_i{}^k}{d\xi} \right) + e^{2\xi} X_i{}^r X_r{}^k = e^{2\xi} R^k{}_{pqi} v^p v^q - e^\xi X_i{}^k,$$

ovvero:

$$\frac{dX_i{}^k}{d\xi} + 2X_i{}^k = e^\xi \left(-X_i{}^r X_r{}^k + R^k{}_{pqi} v^p v^q \right).$$

Passando al parametro $\tau = e^\xi$, si ha: $\frac{dX_i{}^k}{d\xi} = e^\xi \frac{dX_i{}^k}{d\tau}$, e l'ultima equazione si riscrive:

$$\tau \frac{dX_i{}^k}{d\tau} + 2X_i{}^k = \tau \left(-X_i{}^r X_r{}^k + R^k{}_{pqi} v^p v^q \right).$$

Alternativamente, procedendo in linguaggio covariante:

$$\begin{aligned}
\nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i} &= Y_i{}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \nabla_U \nabla_U \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{DY_i{}^k}{D\xi} \frac{\partial}{\partial x^k}, \\
\frac{DY_i{}^k}{D\tau} &= \frac{1}{e^\xi} \frac{DY_i{}^k}{D\xi} = \frac{1}{e^\xi} \frac{D}{D\xi} \left(e^\xi X_i{}^k \right) = X_i{}^k + \frac{DX_i{}^k}{D\xi},
\end{aligned}$$

e la B.1 diventa:

$$\tau \frac{DX_i{}^k}{D\tau} + 2X_i{}^k = \tau R^k{}_{pqi} v^p v^q. \tag{B.2}$$

La B.2 è l'equazione della deviazione geodetica. Per derivazione covariante successiva, dalla B.2 si ottiene:

$$\begin{aligned}
\tau \frac{D^2 X_i^k}{D\tau^2} + 3 \frac{DX_i^k}{D\tau} &= R^k{}_{pqi} v^p v^q + \tau R^k{}_{pqi||j_1} v^p v^q v^{j_1}, \\
\tau \frac{D^3 X_i^k}{D\tau^3} + 4 \frac{D^2 X_i^k}{D\tau^2} &= 2R^k{}_{pqi||j_1} v^p v^q v^{j_1} + \tau R^k{}_{pqi||j_1 j_2} v^p v^q v^{j_1} v^{j_2}, \\
&\dots \\
\tau \frac{D^r X_i^k}{D\tau^r} + (r+1) \frac{D^{r-1} X_i^k}{D\tau^{r-1}} &= (r-1) R^k{}_{pqi||j_1 \dots j_{r-2}} v^p v^q v^{j_1} \dots v^{j_{r-2}} \\
&\quad + \tau R^k{}_{pqi||j_1 \dots j_{r-1}} v^p v^q v^{j_1} \dots v^{j_{r-1}}. \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

4. Proviamo che le equazioni precedenti fissano il limite per $\tau \rightarrow \infty$ di tutte le derivate successive di X_i^k :

(a) $\lim_{\tau \rightarrow 0} X_i^k = 0$ per costruzione ($X_i^k = \Gamma_{pi}^k (\tau v^1 \dots \tau v^n) v^p \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$).

(b) Dalla B.2:

$$\frac{DX_i^k}{D\tau} + 2 \frac{X_i^k}{\tau} = R^k{}_{pqi} (\tau v) v^p v^q.$$

Al limite $\tau \rightarrow 0$, osservando che per $\tau = 0$ i simboli di Christoffel sono tutti nulli e dunque: $\frac{D}{D\tau} \Big|_{\tau=0} \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{\tau=0}$, usando la regola di De l'Hospital si ottiene:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} 3 \frac{DX_i^k}{D\tau} = R^k{}_{pqi} (x_0) v^p v^q.$$

(c) Con analogo procedimento l'equazione successiva porge:

$$\begin{aligned}
\frac{D^2 X_i^k}{D\tau^2} + \frac{1}{\tau} \left(3 \frac{DX_i^k}{D\tau} - R^k{}_{pqi} v^p v^q \right) &= R^k{}_{pqi||j_1} v^p v^q v^{j_1} \\
\implies \lim_{\tau \rightarrow 0} 4 \frac{D^2 X_i^k}{D\tau^2} &= 2R^k{}_{pqi||j_1} (x_0) v^p v^q v^{j_1}.
\end{aligned}$$

Ciò suggerisce di supporre induttivamente:

$$(r+1) \frac{D^{r-1} X_i^k}{D\tau^{r-1}} \Big|_{x_0} = (r-1) R^k{}_{pqi||j_1 \dots j_{r-2}} (x_0) v^p v^q v^{j_1} \dots v^{j_{r-2}}.$$

si ricava per il tensore metrico:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \implies \frac{dg_{ij}}{d\tau} = \left(X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, X_j^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= X_i^k g_{kj} + X_j^k g_{ik}. \end{aligned}$$

Perciò:

$$\left. \frac{dg_{ij}}{d\tau} \right|_{x_0} = 0.$$

Per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 g_{ij}}{d\tau^2} \right|_{x_0} &= \left(\frac{dX_i^k}{d\tau} g_{kj} + X_i^k \frac{dg_{kj}}{d\tau} + \frac{dX_j^k}{d\tau} g_{ik} + X_j^k \frac{dg_{ik}}{d\tau} \right) \Big|_{x_0} \\ &= \frac{1}{3} (R_{jpqi} + R_{ipqj}) \Big|_{x_0} v^p v^q = \frac{2}{3} R_{ipqj}(x_0) v^p v^q \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^r g_{ij}}{d\tau^r} \right|_{x_0} &= \left(\frac{d^{r-1} X_i^k}{d\tau^{r-1}} g_{kj} + \frac{d^{r-2} X_i^k}{d\tau^{r-2}} \frac{dg_{kj}}{d\tau} + \dots + \frac{dX_i^k}{d\tau} \frac{d^{r-2} g_{kj}}{d\tau^{r-2}} \right. \\ &\quad + X_i^k \frac{d^{r-1} g_{kj}}{d\tau^{r-1}} + \frac{d^{r-1} X_j^k}{d\tau^{r-1}} g_{ik} + \frac{d^{r-2} X_j^k}{d\tau^{r-2}} \frac{dg_{ik}}{d\tau} + \dots \\ &\quad \left. + \frac{dX_j^k}{d\tau} \frac{d^{r-2} g_{ik}}{d\tau^{r-2}} + X_j^k \frac{d^{r-1} g_{ik}}{d\tau^{r-1}} \right) \Big|_{x_0} \\ &= \left(\frac{r-1}{r+1} R_{jpqi} \Big|_{j_1 \dots j_{r-2}} v^p v^q v^{j_1} \dots v^{j_{r-2}} + \dots \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} R^k{}_{pqi} v^p v^q \frac{d^{r-2} g_{kj}}{d\tau^{r-2}} \\ &\quad + \frac{r-1}{r+1} R_{ipqj} \Big|_{j_1 \dots j_{r-2}} v^p v^q v^{j_1} \dots v^{j_{r-2}} + \dots \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} R^k{}_{pqj} v^p v^q \frac{d^{r-2} g_{ik}}{d\tau^{r-2}} \right) \Big|_{x_0}. \end{aligned}$$

Ciò mostra induttivamente che nello sviluppo in serie di Taylor:

$$g_{ij}(\tau v^1 \dots \tau v^n) = g_{ij}(0) + \tau \left. \frac{dg_{ij}}{d\tau} \right|_{\tau=0} + \tau^2 \left. \frac{d^2 g_{ij}}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} + \dots$$

i coefficienti dei termini di grado l dipendono solo dalle derivate covarianti fino all'ordine $(l-2)$ di $R^i{}_{jkl}$ calcolate in x_0 e da $g_{ij}(x_0)$. In particolare, in una varietà riemanniana *simmetrica*, in cui è $\nabla R =$

0, le espressioni precedenti si semplificano e possono essere scritte esplicitamente; da B.5 si ha infatti:

$$X_i^k (\tau v^1 \dots \tau v^n) = \frac{\tau}{3} R^k_{pqi} (x_0) v^p v^q$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^r g_{ij}}{d\tau^r} \right|_{x_0} &= \left(\frac{dX_i^k}{d\tau} \frac{d^{r-2} g_{kj}}{d\tau^{r-2}} + \frac{dX_j^k}{d\tau} \frac{d^{r-2} g_{ik}}{d\tau^{r-2}} \right) \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{3} v^p v^q \left(R^k_{pqi} \frac{d^{r-2} g_{kj}}{d\tau^{r-2}} + R^k_{pqj} \frac{d^{r-2} g_{ik}}{d\tau^{r-2}} \right) \Big|_{\tau=0}. \end{aligned}$$

Induttivamente si ricava per $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^{2r} g_{ij}}{d\tau^{2r}} \right|_{x_0} &= \left(\frac{2}{3} \right)^r v^{p_1} v^{q_1} \dots v^{p_r} v^{q_r} \cdot \\ &\quad \cdot \left(R_{k_1 p_1 q_1 j}^{k_1} R_{p_2 q_2 k_2}^{k_2} \dots R_{p_r q_r i}^{k_{r-1}} \right), \end{aligned}$$

mentre le derivate di ordine dispari sono nulle:

$$\left. \frac{d^{2r-1} g_{ij}}{d\tau^{2r-1}} \right|_{x_0} = 0.$$

Lo sviluppo in serie cercato è dunque:

$$\begin{aligned} g_{ij} (x^1 \dots x^n) &= g_{ij} (x_0) \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^r x^{p_1} x^{q_1} \dots x^{p_r} x^{q_r} \cdot \\ &\quad \cdot \left(R_{k_1 p_1 q_1 j}^{k_1} R_{p_2 q_2 k_2}^{k_2} \dots R_{p_r q_r i}^{k_{r-1}} \right) \Big|_{x_0}. \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] F. W. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*.
- [2] S. Helgason: *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.
- [3] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick: *Analysis, Manifolds and Physics*, Part I, North-Holland, 1991.
- [4] Varadarajan:
- [5] S. Kobaiashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, Vols. I, II, Interscience, 1969.
- [6] L. P. Eisenhart: *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1926.
- [7] L. P. Eisenhart: *Continuous Groups of Transformations*, Dover Publications, 1961.
- [8] M. P. Ryan, L. C. Shepley: *Homogeneous Relativistic Cosmology*, Princeton University Press, 1975.
- [9] Misner: *Gravitation*
- [10] Schiff:
- [11] R. Penrose: *Annals of Physics*, **10**, pp. 171-201, 1960.
- [12] I. Ozsvath: *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 6, N. 4 (1965), pp. 590-610.
- [13] D. L. Farnsworth, R. P. Kerr: *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 7, N. 9 (1966), pp.1625-1632.
- [14] K. Gödel: *Review of Modern Physics*, **21** (1949), 447-450.
- [15] S. Chandrasekhar, J. P. Wright: *Proceedings of the National Academy of Science*, **47** (1961), 341-347.

- [16] L. Bianchi: *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri, 1918.
- [17] A. H. Taub: *Annals of Mathematics*, **53** (1951), 472.
- [18] C. W. Misner: *Taub-NUT space as a counterexample to almost anything*, in: *Relativity Theory and Astrophysics I: Relativity and Cosmology*, ed. J. Ehlers, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 8 (American Mathematical Society), pp. 160-169, 1967.
- [19] E. Newman, L. Tamburino, T. Unti: *Journal of Mathematical Physics*, **4** (1963), 915-923.
- [20] C. W. Misner, A. H. Taub: *Soviet Physics JETP*, Vol.28, N.1 (1969), pp. 122-133.
- [21] A. Z. Petrov: *Einstein Spaces*, Pergamon Press, 1969.
- [22] S. W. Hawking, G. F. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1986.
- [23] H. P. Robertson, T. W. Noonan: *Relativity and Cosmology*, Saunders Physics Books, 1968.

Ringraziamenti.

La mia sincera gratitudine va al professor Enrico Massa per l'attenzione e per la pazienza con cui ha seguito questo lavoro. Gli sono riconoscente del molto tempo che mi ha dedicato, del suo aiuto puntuale e prezioso, dei consigli e delle rassicurazioni.

Ringrazio il professor Renzo Collina, fra le molte ragioni, per la sua disponibilità, per i suoi suggerimenti e per l'incoraggiamento che mi ha dato.

Grazie di cuore, infine, a coloro, fra i miei amici compagni di corso, che più volte e con pazienza hanno contribuito a questa tesi.

Questo lavoro è dovuto in larga misura alle persone che qui ho ricordato. È per me un grande piacere, e un orgoglio, riconoscerlo.

