TOMOGRAFIA GEOMETRICA E DISCRETA

LINEE DI RICERCA

I principali argomenti su cui si focalizza l'attività di ricerca del gruppo di TOMOGRAFIA GEOMETRICA E DISCRETA sono di due tipi.

• Problemi di unicità, caratterizzazione di ambiguità ed eventuali stime della stabilità di una ricostruzione (si veda per esempio [14, 15, 12, 13, 22, 2, 3, 4, 7, 8, 11, 21]).

• Algoritmi di ricostruzione mediante raggi X con relative questioni di complessità computazionale (si veda per esempio [5, 9, 25, 26, 33, 38]),

Più precisamente possiamo delineare le seguenti linee di ricerca.

- **Unicità e ambiguità**. Le motivazioni di base che spingono a ricercare in queste direzioni provengono da problemi di natura cristallografica. Le alte energie necessarie per produrre le radiografie discrete di un dato cristallo impongono di lavorare con un numero basso di raggi X, per evitare di danneggiare la struttura atomica. Di conseguenza le tecniche convenzionali della Tomografia Computerizzata non possono essere applicate. A questo proposito l'interesse si rivolge alla ricerca del minimo numero di radiografie necessario a garantire la ricostruzione univoca di un oggetto geometrico. La modellizzazione tradizionale della tomografia geometrica consiste quindi nel selezionare una classe $\mathcal{C}$ di insiemi geometrici, ed un certo numero di direzioni $\theta \in [0, 2\pi)$. Per un dato corpo $K \in \mathcal{C}$ vengono valutate le radiografie $R_\theta(K)$ di K prodotte da raggi X condotti lungo le direzioni θ considerate. Si ottiene un risultato di unicità per la classe $\mathcal{C}$ nel momento in cui si riesce a garantire che un insieme finito di direzioni consente di ricostruire esattamente ogni insieme $K \in \mathcal{C}$. Se invece, per un dato insieme U di direzioni, esistono insiemi diversi $K, K' \in \mathcal{C}$ tali che $R_\theta(K) = R_\theta(K')$ per ogni $\theta \in U$, allora si parla di *ambiguità di ricostruzione* in $\mathcal{C}$ rispetto all'insieme di direzioni U. Nel 1980 R. Garner e P. McMullen dimostrarono ([27]) che in $\mathbb{R}^2$ questo fatto è equivalente all'esistenza di una particolare struttura geometrica, detta U*-poligono*, se $\mathcal{C}$ è la classe dei corpi convessi. Nel 1997 R. Gardner e P. Gritzmann estesero il risultato alla Tomografia Discreta, mostrando che la stessa cosa si verifica nel reticolo ([24]).
- **Raggi X sorgenti.** L'analisi delle strutture U-poligonali ha assunto un ruolo decisivo nei problemi di Tomografia Discreta e sono apparsi diversi lavori relativi al loro studio geometrico (si veda per esempio [16] e [17] e la bibliografia in essi contenuta). Ulteriori sviluppi potrebbero riguardare la considerazione delle stesse problematiche attraverso l'uso di raggi X di tipo sorgente. Questi sono stati introdotti per la prima volta in [18], dove sono stati forniti i primi risultati riguardanti i P-poligoni, le strutture geometrici responsabili delle ambiguità di ricostruzione legate a questo tipo di tomografia (si veda anche [19] e [20]). Lo studio geometrico di U-poligoni e P-poligoni sembra coinvolgere delicate questioni di geometria proiettiva e di teoria dei numeri. Si potrebbero esplorare in maniera più approfondita le connessioni fino ad ora emerse (si veda [18]), per tentare di delineare un quadro unitario che inquadri in una stessa teoria i risultati ottenuti per raggi X paralleli e per raggi X sorgente.
- **Stime di stabilità.** Un altro problema di notevole interesse è quello di stimare la differenza di due insiemi tomograficamente equivalenti ([2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 21]). Essa fornisce una misura della distanza dall'unicità per il dato insieme di direzioni, per cui, una volta selezionato l'insieme di direzioni e/o la griglia, si può tradurre lo studio delle configurazioni ambigue in limiti sulla differenza tra due insiemi tomograficamente equivalenti. Queste stime possono inoltre tenere in considerazione varie cause che provocano rumore nell'acquisizione dei dati, e si traducono in modelli di raggi X rumorosi ottenuti attraverso l'uso di strutture di ambiguità. Di conseguenza la ricerca di stime di stabilità porta necessariamente all'esigenza di una migliore conoscenza degli insiemi ambigui discreti. Una direzione di ricerca aggiuntiva è rivolta alla valutazione di eventuali relazioni tra gli errori nella raccolta dei dati e le proprietà geometriche delle strutture ambigue coinvolte.

- **Approccio algebrico.** Prescindendo dalla classe degli insiemi convessi, ci si può chiedere se esistono strutture geometriche più generali associate ad ambiguità di ricostruzioni. Già G.G. Lorentz aveva mostrato l'esistenza di strutture di questo tipo, denominate *switching components* ([34]), successivamente riprese in vari contesti, anche con nomi diversi (per esempio H. Ryser le definì *interchanges* in [36]). Nel 2001 L. Hajdu e R. Tijdeman ([29]) riuscirono a caratterizzare queste strutture, dimostrando che ogni switching component può essere descritta da un polinomio che si fattorizza lungo le direzioni di switching. Sfruttando questo risultato si può allora lavorare in termini algebrici relativamente a problemi di ricostruzione di insiemi discreti all'interno di griglie finite. Ci sono promettenti risultati in questa direzione [10], che si potrebbero approfondire e rafforzare. L'obiettivo è quello di fornire strumenti generali per problemi di ricostruzione di campioni di materiali mediante un numero limitato di proiezioni (si veda per esempio [28] ed [29] per una descrizione dettagliata della questione).
- **Algoritmi e Complessità.** In connessione con le possibili caratterizzazioni costruttive di situazioni di unicità o di ambiguità di ricostruzione, c'è la ricerca di espliciti algoritmi per la ricostruzione di insiemi discreti aventi somme nulle lungo direzioni prestabilite. Problemi connessi riguardano lo studio della complessità computazionale degli algoritmi ottenuti, oppure la stima della stabilità di una data ricostruzione nel caso in cui la raccolta dei dati sia affetta da errori ([7, 9, 15, 24, 25, 26, 38]). Assume quindi un importante significato la ricerca di insiemi costituiti da un numero ridotto di direzioni per mezzo dei quali sia possibile ricostruire in maniera esatta insiemi reticolari limitati soddisfacenti opportune ipotesi geometriche. Si possono considerare diverse classi di insiemi reticolari (per esempio convessi, quasi-convessi, stellati, poliomini, inscrittibili e molti altri), generalmente rappresentati come funzioni su un dominio assegnato, a valori discreti.

Riferimenti bibliografici

[1] S. van Aert, K.J. Batenburg, M.D. Rossell, R. Erni, and G. van Tendeloo, *Three-dimensional atomic imaging of crystalline nanoparticles*, Nature, 470, (2011), pp. 374-377.

[2] A. Alpers and S. Brunetti, *Stability results for the reconstruction of binary pictures from two projections*, Image and Vision Computing 25, (2007), pp. 1599–608.

[3] A. Alpers and P. Gritzmann, *On stability, error correction, and noise compensation in discrete tomography*, SIAM J. Discrete Math. 20 (2006), pp. 227–39.

[4] A. Alpers, P. Gritzmann, and L. Thorens, *Stability and instability in discrete tomography* , in Digital and Image Geometry 2000, Lecture Notes in Computer Science 2243, Springer. Berlin, 2001, pp. 175–86.

[5] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat and R. Pinzani, *X-rays characterizing some classes of discrete sets*, Proceedings of the Workshop on Discrete Tomography: Algorithms and Applications (Certosa di Pontignano, 2000), Linear Algebra Appl. **339** (2001), 3-21.

[6] J. Baumann, Z. Kiss, S. Krimmel, A. Kuba, A. Nagy, L. Rodek, B. Schillinger and J. Stephan, *Discrete Tomography Methods for Nondestructive Testing*, in Advances in Discrete Tomography and its Applications, G. Herman A. Kuba eds, Birkhauser Boston, 2007, pp. 303-331.

[7] S. Brunetti and A. Daurat, *An algorithm reconstructing lattice convex sets*, Theoret. Comp. Sci. 304 (2003), pp. 35–57.

[8] S. Brunetti and A. Daurat, *Stability in discrete tomography: Some positive results*, Discrete Appl. Math 147 (2005), pp. 207–26.

[9] S. Brunetti and A. Daurat, *Reconstruction of Q-convex Lattice Sets*, in Advances in Discrete Tomography and its Applications, G. Herman A. Kuba eds, Birkhauser Boston, 2007, pp. 31–54.

[10] S. Brunetti, P. Dulio and C. Peri C, *Characterization of -1,0,1 valued functions in Discrete Tomography under sets of four Directions*, LNCS 6607, 16-th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), Nancy (2011) pp. 394-405.

[11] B. E. van Dalen, *Stability results for two directions in discrete tomography*, Discrete Math. 309 (2009), pp. 3905–16.

[12] B. E. van Dalen, *On the difference between solutions of discrete tomography problems*, Journal of Combinatorics and Number Theory 1 (2009), pp. 15–29.

[13] B. E. van Dalen, *On the difference between solutions of discrete tomography problems II*, Pure Mathematics and Applications, 20 (2009) N.1-2 pp. 103–12.

[14] A. Daurat, *Salient points of Q-convex sets*, Internat. J.Pattern Recognition Artificial Intelligence 15(7) (2001), pp. 1023–1030.

[15] A. Daurat, *Determination of Q-convex sets by X-rays*, Theor. Comput. Sci. 332 (2005), pp. 19–45.

[16] P. Dulio, *Convex decomposition of U-polygons*, Theoretical Computer Science, 406/1-2, (2008), 80-89.

[17] P. Dulio and C. Peri C, *On the geometric structure of lattice U-polygons*, Discrete Math., 307/19-20 (2007), 2330-2340.

[18] P. Dulio, R.J. Gardner and C. Peri,*An introduction to Discrete Point X-Rays*, in Advances in Discrete Tomography and Its Applications, edito da G.Herman-A.Kuba, Birkhauser Boston, 2007, 19-30.

[19] P. Dulio, R.J. Gardner and C. Peri *Discrete point X-rays*, SIAM J. Discrete Math. 20, no. 1 (2006), 171-188.

[20] P. Dulio, R.J. Gardner and C. Peri *Discrete point X-rays of Convex Lattice Sets*, Electronic Notes in Disc. Math., 20 (2005), 1-13.

[21] Dulio P.-Longinetti M.-Peri C.-Venturi A., *Sharp affine stability estimates for Hammer's problem*, Advances in Applied Mathematics, 41/1, (2008), 27-51

[22] P. C. Fishburn and L. A. Shepp, *Sets of uniqueness and additivity in integer lattices*, in: Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Application, ed. by G. T. Herman and A. Kuba, Birkhäuser, Boston, 1999, pp. 35–58.

[23] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, 2nd ed. Cambridge University Press, New York, 2006.

[24] R. J. Gardner and P. Gritzmann, *Discrete tomography: Determination of finite sets by X-rays*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), pp. 2271–2295.

[25] R. J. Gardner and P. Gritzmann, *Uniqueness and complexity in discrete tomography*, in: Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Application, ed. by G. T. Herman and A. Kuba, Birkhäuser, Boston, 1999, pp. 85–113.

[26] R. J. Gardner, P. Gritzmann and P. Prangenberg, *On the reconstruction of binary images from their discrete Radon transform*, in: Vision Geometry V, ed. by R. A. Melter, A. Y. Wu, and L. Latecki, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Proceedings 2826, 1996, pp. 121–132.

[27] R.J. Gardner and P. McMullen, *On Hammer's X-ray problem*, *J. London Math. Soc.* (2) **21** (1980), 171-175.

[28] L. Hajdu, *Unique reconstruction of bounded sets in discrete tomography*, *Electron. Notes Discrete Math.*, 20 (2005) 15-25.

[29] L. Hajdu and R. Tijdeman, *Algebraic aspects of discrete tomography*, *J. reine angew. Math* **534** (2001), 119-128.

[30] G. T. Herman and A. Kuba, *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[31] G. T. Herman and A. Kuba, *Advances in Discrete Tomography and its Applications*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[32] C. Kisieloski, P. Schwander, F. H. Baumann, M. Seibt, Y. Kim, and A. Ourmazd, *An approach to quantitative high-resolution transmission electron microscopy of crystalline materials*, Ultramicroscopy 58 (1995), pp. 131–55.

[33] R. W Irving and M. R. Jerrum, *Three-dimensional statistical data security problem*, SIAM J. Comput. 23 (1994), pp. 170–84.

[34] G. G. Lorentz, *A problem of plane measure*, Amer. J. Math. 71 (1949), 417-26.

[35] J.R. Jinschek, K.J. Batenburg, H. Calderon, D. Van Dyck, F.R. Chen, C. Kisielowski, *Prospects for bright field and dark field electron tomography on a discrete grid*, Microscopy Microanal. 10 (Suppl. 3) (2004), pp. 44–45. Cambridge Journals Online.

[36] H. J. Ryser, *Combinatorial properties of matrices of zeros and ones*, Canad. J. Math. 9 (1957), 371377.

[37] P. Schwander, C. Kisieloski, M. Seibt, F. H. Baumann, Y. Kim, and A. Ourmazd, *Mapping projected potential, interfacial roughness, and composition in general cyrstalline solids by quantitative transmission electron microscopy*, Phys. Rev. Lett. 71 (1993), pp. 4150–3.

[38] C. H Slump and J. J. Gerbrands, *A network flow approach to reconstruction of the left ventricle from two projections*, Comput. Graphics Image Processing 18 (1982), pp. 18–36.