DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ DI RICERCA.

Gli argomenti che hanno caratterizzato e caratterizzano attualmente la mia ricerca possono essere classificati come *problemi inversi*, intendendo con ciò lo studio di esistenza, unicità e stabilità di soluzioni a partire dalla conoscenza dei risultati di opportune operazioni di misura. Lo scopo è mettere in evidenza le proprietà tipiche della soluzione, che, a seconda dei casi, possono essere la forma, la struttura numerica, algebrica, analitica o geometrica, oppure l'invarianza rispetto a certe operazioni o trasformazioni. I lavori che ho prodotto più di recente si inquadrano nei settori della **Tomografia Geometrica** e della **Teoria dei Grafi**, mentre, in precedenza, mi ero anche occupato di **misure su spazi omogenei** e di **attrattori di IFS** (Iterated Function Systems). Nel seguito illustro sinteticamente la mia attività di ricerca, rinviando ai singoli lavori per la descrizione dettagliata dei risultati (segnalo solo quelli comparsi su riviste classificate mettendo tra parentesi i riferimenti all'ELENCO GENERALE DELLE PUBBLICAZIONI) .

1. TOMOGRAFIA

Uno dei problemi inversi più noti è quello che viene preso in considerazione nella *Tomografia Assiale Computerizzata (TAC)*. La nascita di questa disciplina può essere fatta risalire al 1979, anno in cui il fisico Allan MacLeod Cormack e l'ingegnere Godfrey Newbold Hounsfield vennero insigniti del premio Nobel per la medicina, in seguito ai loro studi che condussero alla realizzazione del primo tomografo. Nella TAC ci si propone la ricostruzione della densità di un corpo C inaccessibile attraverso la rielaborazione analogica dei dati, costituiti dalle *radiografie* di C, cioè proiezioni su lastre bidimensionali, perpendicolari all'asse del sistema di acquisizione, ottenute mediante irraggiamento di fotoni, noti come *raggi* X. Da questo punto di vista i problemi da risolvere sono di natura algoritmica, legati all'implementazione al calcolatore della *trasformata di Radon inversa*, e di filtraggio, per ottenere pulizia e nitidezza delle immagini prodotte.

Dal punto di vista geometrico il problema tipico è quello di stabilire il minimo numero di radiografie necessarie per ottenere l'esatta ricostruzione di un corpo all'interno di una particolare classe di oggetti (per esempio convessi, stellati, poliomini, grafi). I fasci di fotoni, ed i relativi raggi X prodotti, vengono rappresentati da fasci di rette secanti o parallele. Le principali tecniche utilizzate sono

- Uso di particolari misure. Oltre a quella di Lebesgue, si usa la misura del conteggio, utile a livello discreto, o misure più sofisticate, di solito costruite in riferimento ad una curva assunta come riferimento di base.
- Proprietà dei convessi. Le radiografie risentono fortemente della geometria degli oggetti che vengono indagati. La proprietà dei convessi di contenere tutto il segmento avente per estremi due punti dell'insieme gioca un ruolo fondamentale. A volte i risultati si estendono con poche variazioni anche a classi più ampie.
- Teoria dei numeri. Spesso, a livello reticolare, è necessario procedere attraverso l'uso di tecniche numeriche, come per esempio le valutazioni p-adiche, il Teorema Cinese del Resto e la sua applicazione alla risoluzione di equazioni modulari, l'esistenza di successioni di numeri primi o relativamente primi di lunghezza arbitraria.
- Proprietà proiettive, invarianza del birapporto. Il birapporto è un invariante proiettivo che frequentemente viene sfruttato per caratterizzare insiemi buoni di radiografie. Spesso le considerazioni coinvolgono teoremi e costruzioni geometriche di particolare importanza. Tra questi abbiamo la mid-point construction, i teoremi di Pappo-Pascal, le configurazioni di Desargues e le proprietà dei triangoli omologici.

Argomenti di ricerca e pubblicazioni scientifiche relative.

(1) Studio delle configurazioni che determinano ricostruzioni ambigue con raggi X paralleli (**A1**:[**D,2008**],[**DPe,2007**])
(2) Teoremi di unicità di ricostruzione e configurazioni ambigue per raggi X sorgenti (**A1**:[**DGP,2007**], [**DGP,2006**], [**DGP,2005**], [**DPe,2006**], [**DPe,2002**];**A2**:[**DPe,2002**])
(3) Stabilità delle ricostruzioni (**A1**:[**DLPV,2008**])
(4) Raggi X su grafi (**A2**: [**D,2006**])

2. RICOSTRUZIONE DI GRAFI

Il problema della ricostruzione può anche essere studiato in Teoria dei Grafi. La radiografia di un grafo G realizzata dal vertice v all'istante l, può essere descritta dal numero di cammini di lunghezza l, passanti per v e contenuti in G. La trasformata di Radon del grafo G, detta *path-table*, è la matrice $\mathcal{R}(G)$ la cui entrata (i,j) è il numero di cammini di lunghezza j passanti per il vertice i-mo di G. Il problema tomografico si può allora trasferire sui grafi, chiedendo se è possibile ricostruire G conoscendo $\mathcal{R}(G)$, o più in generale, quali informazioni su G si possono ricavare conoscendo $\mathcal{R}(G)$.

Argomenti di ricerca e pubblicazioni scientifiche relative.

(1) Raggi X sorgenti su grafi (**A2**: [**D,2006**])
(2) Stabilità del centro di un albero sotto l'azione di path-congruences, trasformazioni che conservano la trasformata di Radon del grafo (**A1**: [**DPa,2008**], [**DPa,2006**];**A2**:[**DPa,2006**]).
(3) Connessioni con la congettura di Ulam sulla ricostruzione di un grafo noti i suoi sottografi residui (**A1**:[**DPa,2005**])

3. RICOSTRUZIONE DI DENSITÀ INVARIANTI

In precedenza mi ero occupato di ricostruzioni di densità per famiglie di varietà, a partire dallo studio dei gruppi di trasformazione agenti sulle famiglie. Queste densità hanno la proprietà di essere invarianti rispetto alle trasformazioni dei gruppi considerati. In caso di unicità si parla di *famiglie misurabili.* Data una famiglia di varietà $\mathcal{F}$, si considera il suo gruppo massimo di invarianza, ed il gruppo H ad esso associato nello spazio dei parametri da cui dipende $\mathcal{F}$. La famiglia è misurabile se la densità invariante a sinistra $d\Phi_L$ di H è non banale, oppure, quando $d\Phi_L$ è banale, se tutti i sottogruppi invarianti di H ammettono la stessa funzione invariante integrale non banale.

Argomenti di ricerca e pubblicazioni scientifiche relative.

(1) Studio della misurabilità di una data famiglia $\mathcal{F}$ con metodi diretti. (**A2**: [**D,1995**],[**DPet,1995a**], [**DPet,1995b**], [**SaD,1994**], [**D,1993a**])
(2) Studio della misurabilità di una data famiglia $\mathcal{F}$ mediante identificazione con uno spazio quoziente (**A2**:[**D,1996a**], [**D,1996b**], [**D,1996c**], [**D,1999**])
(3) Studio della misurabilità di una data famiglia $\mathcal{F}$ a partire da sottofamiglie opportune per le quali la misurabilità è già stata studiata in precedenza (**A1**:[**D,1997**], [**D,1996**]; **A2**:[**D,1997**]).
(4) Determinazione di una misura a partire dalla sola l'ipotesi che essa sia una valutazione (additività finita), invariante rispetto a determinate trasformazioni geometriche (**A2**:[**DPe,2000**]).

4. INVARIANZA ED ITERAZIONE

Quando le trasformazioni che agiscono su un dato oggetto sono contrazioni vengono coinvolti teoremi di punto fisso. In questi casi l'iterazione gioca un ruolo fondamentale. Una contrazione è una funzione $f : X \to X$, definita su uno spazio metrico completo X, che sia Lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1. Una contrazione ammette sempre uno ed un solo punto fisso $x_0 = \lim_{n\to\infty} f^n(x), \quad \forall x \in X$.

Supponiamo ora di considerare, sullo spazio metrico X, l'azione contemporanea di un insieme finito di $M \geq 2$ contrazioni. Si ha cioè un IFS (Iterated Function System) di contrazioni, il cui attrattore è un insieme A dotato di un infinità più che numerabile di punti, costituito dai punti fissi di ogni possibile contrazione ottenuta componendo le M contrazioni iniziali. Spesso A prende il nome di *frattale* in quanto può essere descritto dimensionalmente da un numero non intero.

Argomenti di ricerca e pubblicazioni scientifiche relative.

(1) Studio della dimensione frattale in presenza di curvatura (**A2**:[**D,1991**]).
(2) Descrizione dell'attrattore A di un IFS (Iterated Function System) di contrazioni in funzione dei punti fissi delle contrazioni generatrici (**A2**:[**D,1993b**]).
(3) Studio di proprietà tipiche di *semicontrazioni*, cioè funzioni f Lipschitziane con Lip $f = 1$ (**A1**:[**DS,2002**])